



Электродинамика и распространение радиоволн

Кафедра «Радиоэлектроника»

Лекционный курс

Авторы

Звездина М.Ю.

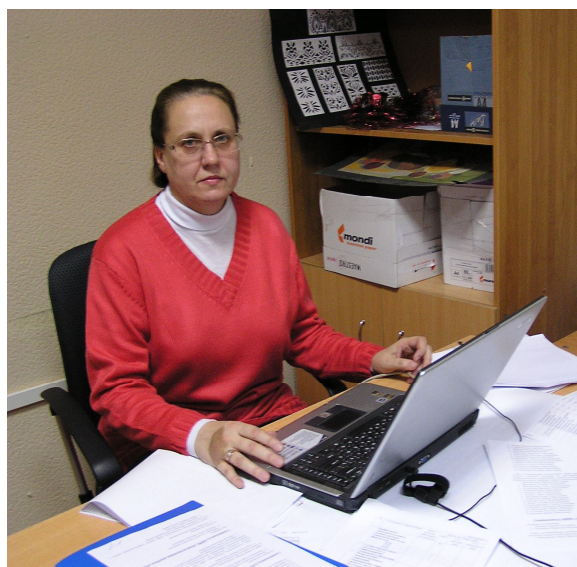
Шокова Ю.А.



Аннотация

Лекционный курс предназначен для студентов направлений 210400 и 210700. Раскрывает основные вопросы теории электромагнитного поля и распространение ра-

Авторы



Звездина Марина Юрьевна – зав. кафедрой «Радиоэлектроника»

ДОКТОР ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ

Сфера научных интересов – Устройства СВЧ и антенны

**Шокова Юлия Александровна – старший преподаватель кафедры
«Радиоэлектроника»**

КАНДИДАТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Сфера научных интересов – Антенны, цифровая обработка сигналов

Оглавление

Тема 1. Основные законы электромагнитного поля и уравнения Максвелла	6
ЛЕКЦИЯ №1. Уравнения Максвелла для различных типов сигналов	6
1.1 Введение. Основные понятия электродинамики.	6
1.2 Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.....	8
1.3 Метод комплексных амплитуд.....	12
Лекция №2. Основные законы электромагнитного поля	13
2.1 Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения	13
2.2 Основные теоремы электродинамики.....	18
2.3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга	20
Тема 2. Излучение элементарных источников.....	23
Лекция № 3. Электродинамические потенциалы электромагнитного поля.....	23
3.1 Возбуждение электромагнитного поля заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме	23
3.2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля	24
3.3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов.....	26
3.4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца.....	28
Лекция N 4 Электромагнитные поля элементарных источников.....	30
4.1 Общие характеристики электромагнитного поля элементарных источников.....	30
4.2 Поля элементарных электрического и магнитного вибраторов. Диаграмма направленности.....	32
4.3 Сферические волны. Поле электрического и магнитного вибраторов	36
4.4 Цилиндрические волны. Структура поля линейного электрического и магнитного излучателей	37
Лекция N 5. Поле системы элементарных излучателей	38
5.1 Принцип Гюйгенса-Кирхгофа.....	38
5.2 Излучатель Гюйгенса	41
5.3 Принцип получения остронаправленного излучения	43
Тема 3. Плоские электромагнитные волны в неограниченных средах.....	48
Лекция N 6. Электромагнитные волны в различных средах.....	48
6.1 Классификация сред.....	48
6.2 Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь.....	49

Электродинамика и распространение радиоволн

6.3 Плоские волны в средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн.....	52
6.4 Поляризация плоских волн	55
Лекция №7. Распространение плоских волн в гиротропных средах	56
7.1 Плоские однородные волны в ферритах при наличии подмагничивания. Резонансное поглощение	56
7.2 Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите.....	58
7.3 Особенности распространения электромагнитных волн в поперечно намагниченном феррите.....	61
Лекция №8. Волновые явления вблизи границы раздела сред	62
8.1. Нормальное падение плоских волн на границу раздела сред.....	62
8.2. Наклонное падение плоских волн на границу раздела сред. Двойное лучепреломление	65
8.3 Плоские неоднородные волны на границе раздела сред.....	68
8.4 Приближенные граничные условия Леонтовича.....	69
<i>Тема 4. Направляемые волны</i>	<i>71</i>
Лекция N 9 Направляющие системы	71
9.1 Типы направляющих систем.....	71
9.2 Уравнения электродинамики для направляемых волн.....	72
9.3 Режимы работы направляющих систем.....	73
9.4 Полые волноводы.....	76
Лекция N 10. Волноводы с волнами типа Т	81
10.1 Коаксиальный волновод	81
10.2 Полосковые и микрополосковые линии.....	82
10.3 Линии поверхностных волн. Замедляющие структуры	84
10.4 Диэлектрические волноводы. Оптические волноводы и световоды.....	88
10.5 Длинные линии и их параметры	89
Лекция N 11. Колебательные системы СВЧ.....	94
11.1 Электромагнитные колебания в объемных резонаторах.....	94
11.2 Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах.....	97
11.3 Добротность объемных закрытых резонаторов	98
<i>Тема 5. Основные понятия дифракции электромагнитных волн</i>	<i>102</i>
Лекция N 12. Электродинамические задачи дифракции	102
12.1 Строгая постановка дифракционных задач	102

Электродинамика и распространение радиоволн

12.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечном круглом цилиндре	103
12.3 Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем клине и полуплоскости	107
12.4 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящей сфере	111
Тема 6. Основные понятия процессов распространения электромагнитных волн.....	114
Лекция N 13. Распространение волн в свободном пространстве.....	114
13.1 Понятие радиолинии первая и вторая модели радиотрасс	114
13.2 Модель свободного пространства	116
13.3 Множитель влияния среды. Замирания	118
Лекция N 14. Распространение радиоволн над земной поверхностью.....	120
14.1 Расстояние прямой видимости	120
14.2 Область, существенная для прохождения радиоволн. Зоны Френеля	122
14.3. Распространение радиоволн в условиях пересеченной местности и при наличии потерь. Критерий Релея	124
Лекция N 15. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов	128
15.1 Метод зеркальных изображений применительно к диапазону УКВ	128
15.2 Поле диполя с использованием второй модели	130
15.3 Поле диполя с учетом потерь в Земле	131
15.4 Поле вертикального электрического вибратора в диапазонах СВ и ДВ.....	133
Лекция N 16. Распространение радиоволн в тропосфере	135
16.1 Электрические параметры атмосферы	135
16.2 Явления, имеющие место при распространении радиоволн в тропосфере	137
16.3 Рефракция радиоволн	138
16.4. Условия возникновения сверхрефракции.....	140
16.5. Поглощение радиоволн и рассеяние на неоднородностях.....	141
Лекция N 17. Распространение радиоволн в ионосфере.....	142
17.1 Влияние постоянного магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере. Гиромангнитный резонанс	142
17.2 Траектория распространения волны через ионосферу	145
17.3 Квазипоперечное и квазипродольное распространение радиоволн.....	147
17.4 Распространение радиоволн в межпланетной плазме	150
Список использованных источников	152

Тема 1. Основные законы электромагнитного поля и уравнения Максвелла

ЛЕКЦИЯ №1. Уравнения Максвелла для различных типов сигналов

1.1 Введение. Основные понятия электродинамики.

Одним из основных элементов системы передачи информации является антенна, позволяющая организовать беспроводную линию. Переносчиком данных в такой линии являются электромагнитные волн. Описание основных закономерностей электромагнитных полей осуществляется с помощью электродинамики.

Электродинамика – это наука, описывающая поведение электромагнитного поля, осуществляющего взаимодействие между зарядами. По определению (ГОСТ 19880-74) электромагнитное поле представляет собой вид материи, определяемый во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны, называемые соответственно электрическим полем и магнитным полем, и оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы, зависящие от их скорости и заряда. Классическая электродинамика является макроскопической, поскольку оперирует со значениями электромагнитных величин, усредненными по времени и пространству. Усреднение производится для интервалов времени, значительно больших периодов обращения или колебания элементарных заряженных частиц в атомах или молекулах, а также для участков поля, объемы которых во много раз превышают объемы атомов и молекул.

Простейшие электрические и магнитные явления были известны еще в древние времена. Однако лишь в 1600г. английский ученый У.Гильберт впервые их разграничил. В семнадцатом – первой половине восемнадцатого веков проводились многочисленные опыты с наэлектризованными телами. Во второй половине 18 века началось количественное изучение электрических явлений.

Следующий этап в развитии электродинамики связан с работами немецких физиков Г. Ома, определившего количественную зависимость электрического тока от напряжения в цепи (1826г.) и К.Ф. Гаусса, сформулировавшего в 1830г. основную теорему электростатики (теорема Гаусса).

В 1820г. датским физиком Х. Эрстедом было сделано наиболее фундаментальное открытие: он обнаружил связь между электрическими и магнитными явлениями. В 30–40-х годах XIX века в развитие электродинамики внес большой вклад английский ученый М. Фарадей – основоположник общего учения об электромагнитных явлениях, в котором все электрические и магнитные процессы рассматриваются с единой точки зрения. В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции – возбуждение электромагнитного тока в контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Первая математическая формулировка законов электромагнитной индукции была дана немецким физиком Ф. Нейманом в 1845г. Им же были введены важные понятия само- и взаимной индукции токов.

В 1861–1873гг. электродинамика получила свое развитие и завершение в работах Дж. Максвелла. Опираясь на эмпирические законы электромагнитных явлений и вводя гипотезу о порождении магнитного поля переменным электрическим

Электродинамика и распространение радиоволн

полем, Максвелл сформулировал фундаментальные уравнения классической электродинамики, названные его именем. Из уравнений Максвелла вытекало важное следствие – существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. После экспериментов немецкого физика Г. Герца (1886–1889), обнаружившего существование электромагнитных волн, теория Максвелла получила решающее подтверждение. Вслед за открытием Герца были предприняты попытки установить беспроводную связь с помощью электромагнитных волн, завершившиеся созданием радио (А.С. Попов, 1896г.).

С открытием новых факторов и созданием новых теорий значение классической электродинамики не уменьшилось, были определены лишь границы ее применимости. В этих пределах уравнения Максвелла сохраняют силу, являясь фундаментом большинства разделов электродинамики, радиотехники, включая теорию и технику антенн.

Одним из проявлений существования ЭМ поля является воздействие его с силой Лоренца \vec{F} на движущийся со скоростью \vec{v} электрический заряд Q

$$\vec{F}(p, t) = Q(\vec{E}(p, t) + [\vec{v}, \vec{B}(p, t)]), \quad (1.1)$$

где $\vec{E}(p, t)$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{B}(p, t)$ – вектор магнитной индукции, p – точка наблюдения, t – время.

Кроме функций \vec{E} , \vec{B} для описания ЭМ поля вводятся вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}(p, t)$ и вектор электрической индукции (электрического смещения) $\vec{D}(p, t)$. Векторы \vec{D} и \vec{H} характеризуют состояние среды под действием ЭМ поля. Векторы \vec{E} и \vec{D} описывают электрическое поле, а \vec{B} , \vec{H} – магнитное поле. По установившейся традиции магнитное поле в вакууме предпочтительно характеризуют его напряженностью \vec{H} , часто называемый просто магнитным вектором.

Единицы измерения данных векторов: вектора напряженности электрического поля \vec{E} – В/м; вектора напряженности магнитного поля \vec{H} – А/м.

Между векторами ЭМ поля в линейных изотропных средах существует следующая связь (материальные уравнения):

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (1.2a) \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.2b)$$

где приняты обозначения: $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$, $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно; $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36 \cdot \pi)$ Ф/м, $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – электрическая и магнитная постоянные; ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Кроме перечисленных выше векторных величин в электродинамике используется понятие скалярного поля объемной плотности электрического заряда ρ

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (1.3)$$

и векторного поля объемной плотности тока проводимости \vec{j}

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.3) и (1.4) Δq - заряд, содержащийся в объеме ΔV ; ΔS - площадь, ориентированная перпендикулярно движению зарядов; \vec{i}_0 - орт нормали, указывающий направление движения; ΔI - ток, проходящий через ΔS . Предельные переходы в данных формулах следует понимать как условные, поскольку как бы ни уменьшался объем ΔV или элементарная площадь ΔS , они все же должны содержать достаточно большое число элементарных частиц.

Уравнения (1.2) вместе с законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.5)$$

называют **уравнениями состояния линейной изотропной среды**. Здесь σ - удельная проводимость или просто проводимость вещества, измеряемая в [См/м²].

1.2 Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Теоретической основой электродинамики являются сформулированные в конце XIX века Джеймсом Максвеллом уравнения, в которых он обобщил известные к тому времени знания об электромагнитных явлениях. Данная система введена аксиоматически, является постулатами электродинамики и подтверждается результатами современных исследований.

Существует две формы записи системы уравнений Максвелла: дифференциальная и интегральная. Это обусловлено тем, что интегральная форма, основана на экспериментальных данных и удобна для физической трактовки получаемых результатов, а дифференциальная форма удобна для вывода теоретических положений электродинамики.

Для вакуума система уравнений Максвелла имеет вид, приведенный в таблице 1.1:

Переход от дифференциальной записи уравнений Максвелла к интегральной осуществляется с использованием теории векторных функций, в частности, использовании теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Стокса.

Дадим физическую трактовку полной системы уравнений Максвелла.

Электродинамика и распространение радиоволн

Таблица 1.1 – Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}^{\text{э}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$ (1.6a)	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \vec{I},$ (1.7a)
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$ (1.6б)	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s},$ (1.7б)
$\text{div } \vec{D} = \rho,$ (1.6в)	$\oint \vec{D} d\vec{s} = q,$ (1.7г)
$\text{div } \vec{B} = 0,$ (1.6г)	$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0.$ (1.7д)

Первое уравнение (1.6а), (1.7а) описывает закон полного тока (обобщенный закон Ампера), определяет значения вихря магнитного поля и гласит, что токи смещения поля наравне с токами проводимости образуют магнитное поле и являются вихрями этого поля (интегральная форма). Электрический ток любого вида (проводимости, переноса, смещения) сопровождается существованием связанного с ним магнитного поля. Закон изменения электрического поля во времени определяет закон распределения магнитного поля в пространстве.

Заслуга Максвелла состоит в том, что он дополнил правую часть закона Ампера **плотностью тока смещения**

$$\vec{j}_c = d\vec{D}/dt. \quad (1.8)$$

Второе уравнение Максвелла (1.6б), (1.7б) носит название закона электромагнитной индукции (закон Фарадея) и объясняет причину возникновения вихревого электрического поля: изменяющееся во времени магнитное поле сопровождается существованием связанного с ним электрического поля. Закон изменения магнитного поля во времени определяет закон распределения электрического поля в пространстве.

По аналогии с первым уравнением Максвелла величину $d\vec{B}/dt = \vec{j}_c^{\text{м}}$ в правой части второго уравнения Максвелла можно рассматривать как **плотность магнитного тока смещения**.

Максвелл обобщил закон электромагнитной индукции Фарадея, постулировав равенство (1.7б) для **произвольного замкнутого контура**, проходящего в любой среде, в том числе и для воображаемого контура.

Рассмотрим физическую трактовку первого и второго уравнений Максвелла. Для этого воспользуемся известной аналогией замкнутых колец, показанной на рисунке 1.1.

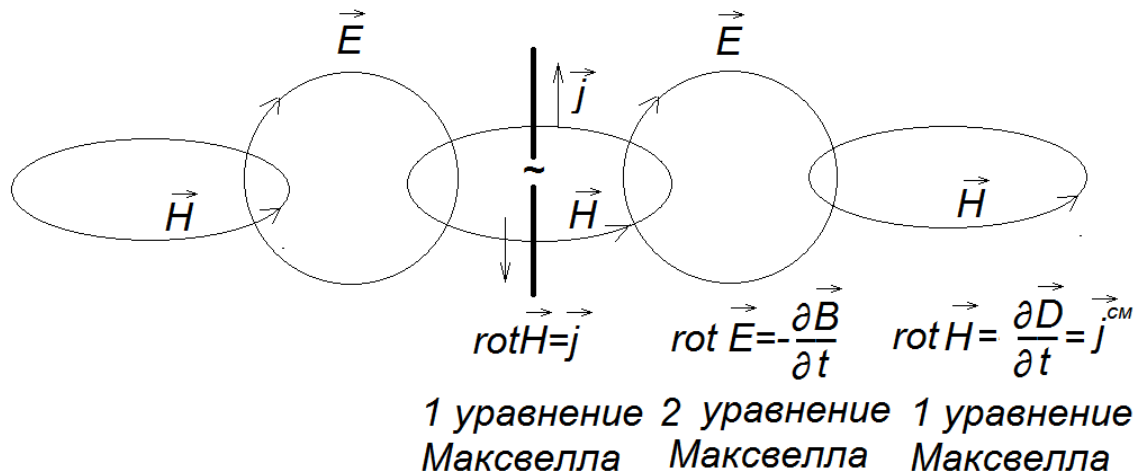


Рисунок 1.1 – Физическая трактовка первого и второго уравнений Максвелла

В соответствии с ней источник переменного напряжения, возбуждающий в нашем случае проволочный излучатель, индуцирует переменный ток. По закону Ампера ток проводимости возбуждает вихреобразное магнитное поле (первое уравнение Максвелла без второго слагаемого в правой части). В соответствии со вторым уравнением Максвелла изменение магнитного поля во времени порождает переменное электрическое поле. Поскольку электрическое и магнитное поле сдвинут по фазе на 90 градусов, то кольца лежат в перпендикулярных плоскостях. Далее изменение во времени электрического поля приводит к возбуждению вихреобразного магнитного поля и т.д. Таким образом, иллюстрация, приведенная на рисунке 1.1, описывает процесс распространения электромагнитного поля в свободном пространстве при удалении от стороннего источника.

Следует отметить, что если в источнике возбуждается не изменяющийся во времени ток (постоянный), то при прекращении его действия ток проводимости исчезает, и вместе с ним исчезает вихреобразное магнитное поле.

Третье и четвертое уравнения Максвелла описывают источники электрического и магнитного поля. Наиболее просто дать их физическую трактовку можно с использованием **закона сохранения заряда**: заряд не уничтожается и не создается из ничего. Если заряд не остается постоянным (т.е. уменьшается или увеличивается), то причиной этого является пересечение поверхности, ограничивающей объем ΔV или площадку ΔS , носителями зарядов. Математической формулировкой данного закона является **уравнение непрерывности тока**:

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.9)$$

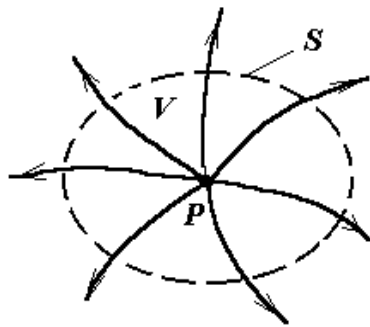
Приведенная формулировка закона сохранения заряда легко интерпретируется на основе использования представления о векторных линиях. Если где-либо в рассматриваемой области плотность заряда ρ убывает ($\partial \rho / \partial t < 0$), то при этом $\text{div } \vec{j} > 0$, а, следовательно, там начинаются линии вектора объемной плот-

Электродинамика и распространение радиоволн

ности тока проводимости (точка истока, рисунок 1.2,а). В случае возрастания плотности заряда ($\partial\rho/\partial t > 0$) $\text{div } \vec{j} < 0$, т.е. в данных точках расположены стоки (рисунок 1.2,б). Если первоначальное распределение заряда в рассматриваемой области не зависит от времени ($\partial\rho/\partial t = 0$, $\text{div } \vec{j} = 0$), то либо векторные линии плотности тока \vec{j} пронизывают область V насквозь, либо $\vec{j} = 0$ (рисунок 1.2,в).

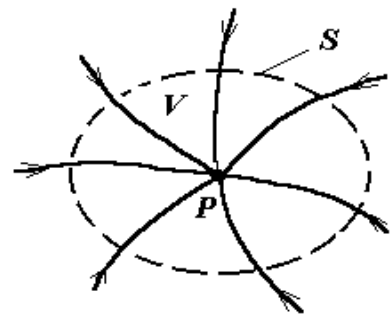
Исходя из вышесказанного, **третье уравнение Максвелла** (обобщение теоремы Гаусса) (1.6в), (1.7в) определяет в качестве источников электрического поля (истоков и стоков в соответствии с трактовкой, приведенной на рисунках 1.1а и 1.1б) электрические заряды.

Четвертое уравнение Максвелла (принцип непрерывности магнитного потока) (1.6г), (1.7г) описывает соленоидальные свойства магнитного поля (рисунок 1.1.в) и гласит, что магнитное поле не имеет истоков или стоков. В природе свободные магнитные заряды (массы) отсутствуют.



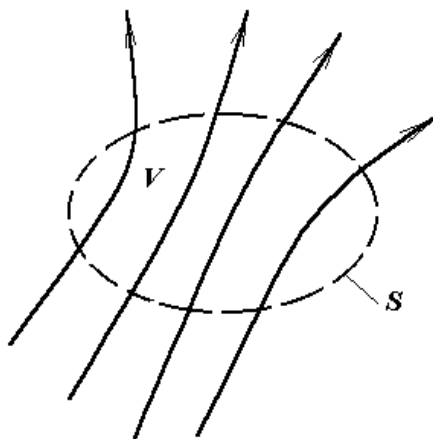
а) $\partial\rho/\partial t < 0$, $\text{div } \vec{j} > 0$

(заряд уменьшается; исток)



б) $\partial\rho/\partial t > 0$, $\text{div } \vec{j} < 0$

(заряд возрастает, сток)



в) $\partial\rho/\partial t = 0$, $\text{div } \vec{j} = 0$ (заряд не изменяется)

Рисунок 1.2 – Физическая трактовка третьего и четвертого уравнений Максвелла

Электродинамика и распространение радиоволн

Анализ первых двух уравнений Максвелла показывает, что при любом изменении во времени электрического поля возникает вихревое магнитное поле (первое уравнение), любое изменение магнитного поля создает, в свою очередь, вихревое электрическое поле (второе уравнение). Таким образом, переменные электрические и магнитные поля не существуют независимо друг от друга, они непрерывно переходят одно в другое и, как будет показано ниже, образуют электромагнитную волну.

Уравнения с дивергенциями векторов показывают, что непрерывность линий электрического поля нарушается в местах скопления электрических зарядов (третье уравнение), а линии магнитного поля непрерывны, т.е. магнитных зарядов не существует (четвертое уравнение).

Заметим сразу, что в точках пространства, в которых действуют так называемые **сторонние** (не зависящие от поля) **токи** \vec{j}^{cm} и заряды ρ^{cm} , последние должны быть учтены в правых частях первого и третьего уравнений Максвелла соответственно.

1.3 Метод комплексных амплитуд

Электромагнитные поля в изотропных линейных однородных средах без сторонних источников подчиняются уравнениям Максвелла от четырехмерных векторных функций (три пространственные координаты и время). Это приводит к большим вычислительным затратам при нахождении структуры электромагнитного поля. В то же время в связи для передачи голосовых сообщений наиболее часто применяются гармонические колебания, временная зависимость для которых описывается в общем случае множителем $\exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i \sin \cos(\omega t)$. Векторные составляющие для такого типа сигнала могут быть представлены выражениями вида:

$$\vec{U}(p, t) = \vec{U}(p) \exp[i(\omega t + \psi(p))]. \quad (1.10)$$

Входящее в выражение (1.10) произведение амплитуды вектора $\vec{U} = \vec{E}, \vec{H}$ на экспоненциальный множитель, содержащий его начальную фазу, называют комплексной амплитудой вектора \vec{U} и обозначают точкой над вектором

$$\dot{U}(p) = \vec{U}(p) \cdot \exp(i\psi). \quad (1.11)$$

Мнимая единица, входящая в соотношения (1.10) и далее, обозначена в соответствии с традициями электродинамики символом i ($i = \sqrt{-1}$). В радиотехнике для этого понятия применяется символ j .

Поскольку комплексная амплитуда не является функцией времени, то возможен переход от уравнений Максвелла относительно мгновенных значений векторов к уравнениям относительно комплексных амплитуд. Данный подход называется **методом комплексных амплитуд**. При этом выражения за счет отбрасывания при записи соотношений временной зависимости упрощаются. Ограничением данного метода является возможность его применения только для гармонических сигналов.

Электродинамика и распространение радиоволн

Приведем примеры упрощения получаемых соотношений. Так, изменяя в уравнениях Максвелла (1.6) порядок дифференцирования и учитывая, что дифференцирование комплексного выражения мгновенного значения величины по времени эквивалентно умножению его на $i\omega$:

$$\frac{d}{dt}(\dot{A} \cdot \exp(i\omega t)) = i\omega \dot{A} \exp(i\omega t), \quad (1.12)$$

получим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + i\omega \vec{D}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В данных уравнениях, описывающих квазистационарные процессы, опущена являющаяся общей временная зависимость $\exp(i\omega t)$. Следует отметить, что в литературе, где применяется метод комплексных амплитуд, обязательно упоминается в начале какое выражение используется для описания временной зависимости. Это обусловлено тем, что в электродинамике возможно использование временной зависимости как $\exp(i\omega t)$, так и $\exp(-i\omega t)$. Определение знака в показателе экспоненты будет в дальнейшем определять вид функций, применяемых для описания волновых процессов.

Лекция №2. Основные законы электромагнитного поля

2.1 Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме, приведенные в лекции 1 и используемые для описания структуры поля, теряют смысл для граничных областей, разделяющих среды с различными параметрами. С точки зрения физики в этих областях происходит изменение параметров среды (диэлектрической ε_a и магнитной μ_a проницаемостей, а также удельной проводимости σ). Причем изменение указанных параметров при переходе точки наблюдения через границу раздела сред происходит скачком на границе поверхности тела. Математически это означает, что параметры ε , μ , σ (или хотя бы один из них) терпят разрыв как функции нормали. В связи с этим возникает необходимость дополнения уравнений Максвелла значениями полей на границе раздела сред, т.е. так называемыми **граничными условиями**. Указанные граничные условия устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Прежде чем рассматривать граничные условия, доопределим понятия плотности заряда и тока, вводя соответственно термины – **плотность поверхностного заряда и плотность поверхностного тока**.

Как известно, каждый из векторов, описывающих электромагнитное поле, на границе раздела можно разложить на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие:

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\vec{F} = \vec{v}_0 F_v + \vec{\tau}_0 F_\tau + \vec{\xi}_0 F_\xi. \quad (2.1)$$

При этом в точке M , лежащей на достаточно гладкой поверхности S раздела сред 1 и 2 (рисунок 2.1), всегда можно выделить столь малую окрестность ΔS , что данный элемент поверхности можно считать плоским. В данной точке M орт нормали \vec{v}_0 (направление из среды 2 в 1) может быть дополнен до правой тройки двумя ортогональными ортами $\vec{\tau}_0$ и $\vec{\xi}_0$, лежащими на ΔS . Если орт $\vec{\tau}_0$ выбран так, что он совпадает по направлению с проекцией некоторого вектора поля \vec{F} на ΔS , то имеем разложение (2.1). Введением такого допущения из рассмотрения исключаются точки, лежащие вблизи изломов и резких изгибов границы или в области быстрого изменения хотя бы одной из сред. Масштабом при оценке малости расстояния служат размеры тела, длина волны (для переменных полей), а также требуемая детализация структуры поля в пространстве (разрешающая способность метода).

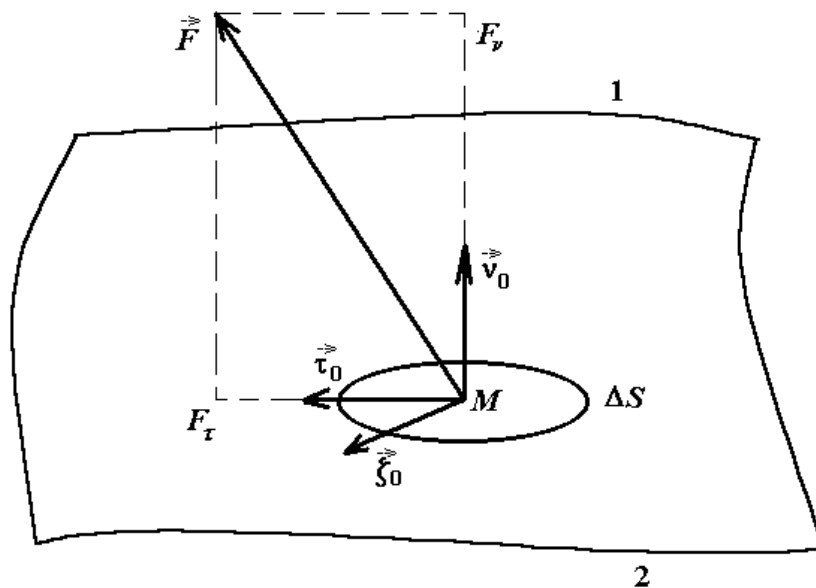


Рисунок 2.1 – Разложение вектора в локальный базис

В ряде случаев на границе раздела сред могут располагаться микроскопические носители заряда, как неподвижные, так и образующие ток проводимости. Поскольку в классической электродинамике принимается, что такого рода заряд не занимает объема, то полагается, что **заряд** является **поверхностным**, определяемым, как было показано на предыдущей лекции, выражением

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (2.2)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

В паре с данным понятием на прошлой лекции вводилось понятие объемной плотности поверхностного электрического тока $\vec{j}^{\text{э.бт}}$, которая связана с **поверхностным током**

$$\vec{\eta} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} i_0 \frac{\Delta I}{\Delta \ell}. \quad (2.2a)$$

соотношением:

$$\vec{j}^{\text{э.бт.}}(\vec{r}) = \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\zeta}) \delta(v - v'), \quad (2.26)$$

где $v' = 0$ на поверхности S .

С учетом введенных величин граничные условия для векторов электрического поля записываются следующим образом. Вектор электрической индукции подчиняется закону:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{v}_0 = \rho, \quad (2.3)$$

т.е. в граничных областях разность **нормальных компонент** вектора электрической индукции в обеих средах равна плотности поверхностного заряда ρ . Если граница не несет заряда ($\rho = 0$), то нормальная компонента вектора \vec{D} при переходе границы остается непрерывной.

Тангенциальная компонента вектора напряженности электрического поля \vec{E} при переходе границы раздела сред всегда остается непрерывной:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0 \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0. \quad (2.4)$$

Второе соотношение из (2.4) более удобно в том смысле, что орт \vec{v}_0 выбирается однозначно. Доказательство данных условий не представляет сложностей, и может быть выполнено самостоятельно, как показано в [1].

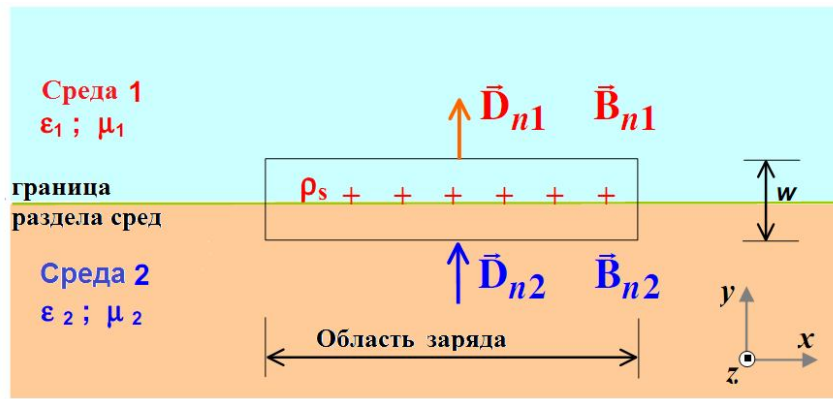
Иллюстрация граничных условий для электрического поля показана на рисунке 2.2. При этом рисунок 2.2,а иллюстрирует условия для нормальных компонент поля, а рисунок 2.2,б – для тангенциальных компонент.

Граничные условия для векторов магнитного поля записываются следующим образом. **Нормальная компонента** вектора магнитной индукции \vec{B} всегда непрерывна

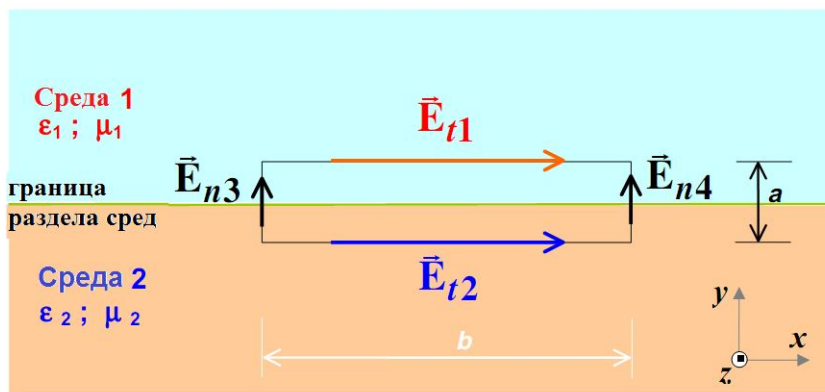
$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{v}_0 = 0. \quad (2.5)$$

Тангенциальные компоненты вектора \vec{H} на границе раздела сред претерпевают разрыв, равный плотности поверхностного электрического тока

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}_0 = \vec{\eta} \quad \text{или} \quad [\vec{v}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{\eta}. \quad (2.6)$$



а



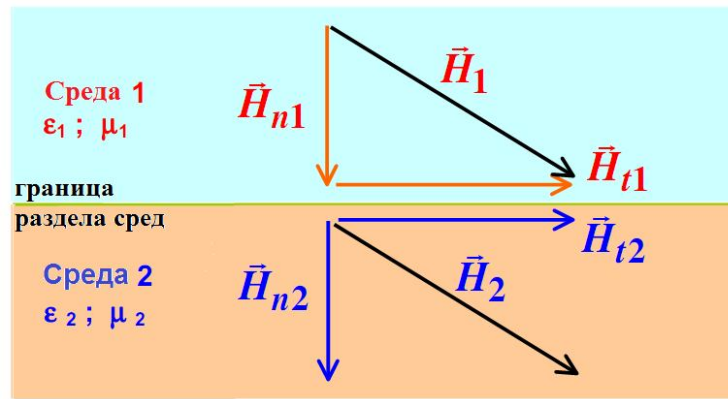
б

Рисунок 2.2 – Иллюстрация граничных условий для электрического поля

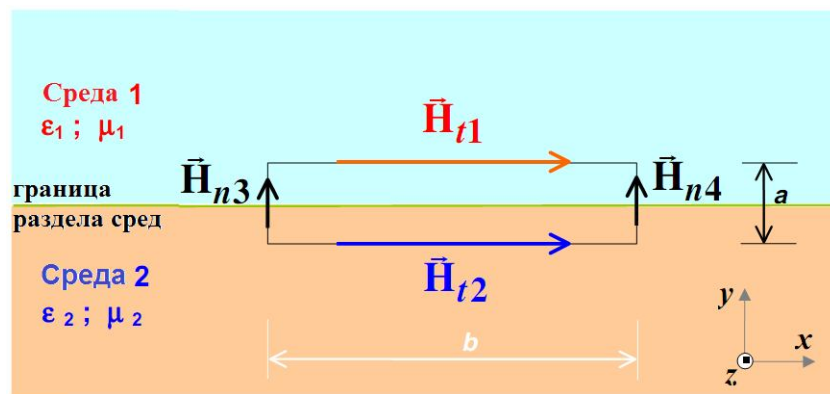
Иллюстрация граничных условий для магнитного поля показана на рисунке 2.3. Как и на рисунке 2.2 рисунок 2.3,а иллюстрирует условия для нормальных компонент поля, а рисунок 2.3,б – для тангенциальных компонент.

Интересно проследить определенную аналогию между граничными условиями для векторов электромагнитного поля. Так, **непрерывными на границе раздела двух сред являются тангенциальные составляющие напряженности электрического поля \vec{E} и нормальная компонента вектора магнитной индукции \vec{B}** . Это связано с отсутствием в природе магнитных зарядов и, следовательно, магнитных токов. В свою очередь, **тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля \vec{H} и нормальная компонента вектора индукции электрического поля \vec{D} терпят на границе раздела сред разрывы, равные соответственно плотности поверхностного электрического тока и плотности поверхностного электрического заряда**.

Рассмотрим частный случай, важный для практического применения: одна из сред на границе раздела является **идеально проводящей** ($\sigma \rightarrow \infty$).



а



б

Рисунок 2.3 – Иллюстрация граничных условий для магнитного поля

Как известно, в идеальном проводнике электромагнитное поле не может существовать - оно вытесняется в бесконечно тонкий слой у поверхности S . Если же внешнее электрическое поле данной (второй) среды отлично от нуля, то под его действием устанавливается такое перераспределение свободных зарядов, которое компенсирует внешнее поле. Граничные условия при этом принимают вид:

При наличии поверхностных зарядов и токов

$$[\vec{v}_0, \vec{E}_1] = \rho, \quad (2.7a)$$

$$[\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{\eta}, \quad (2.7б)$$

При отсутствии поверхностных зарядов и токов

$$[\vec{v}_0, \vec{E}_1] = 0, \quad (2.8a)$$

$$[\vec{v}_0, \vec{H}_1] = \vec{j}^{\text{э.вт.}}. \quad (2.8б)$$

В формуле (2.8б) $\vec{j}^{\text{э.вт.}}$ - объемная плотность вторичного (индуцированного) поверхностного электрического тока, которая связана с поверхностным током соотношением (2.2б).

Электродинамика и распространение радиоволн

В ряде случаев, например, когда границы рассматриваемой области уходят на бесконечность или когда граничная поверхность имеет геометрически сингулярные точки (например, изломы), можно получить несколько математически корректных решений уравнений Максвелла, среди которых лишь одно верно описывает исследуемое физическое явление. В таких случаях для обеспечения единственности решения оказывается необходимым ввести некоторые дополнительные физические ограничения.

При решении задачи для свободного пространства, когда все источники сосредоточены в конечной области, таким дополнительным ограничением, определяющим поведение полей на бесконечности, является **условие излучения**, которое можно сформулировать двумя различными способами:

Для **изотропной непоглощающей среды** поведение полей на бесконечности определяется **условием излучения Зоммерфельда**:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial R} + ik \vec{E} \right) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial R} + ik \vec{H} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Данное условие можно сформулировать следующим образом: амплитуда поля на больших расстояниях от источника должна убывать, по крайней мере, как обратная от данного расстояния величина ($|\mathbf{A}| \sim 1/r$), а фаза поля должна быть такой же, как у уходящей на бесконечность волны ($\varphi \sim \exp(-ikr)$).

2.2 Основные теоремы электродинамики

В основе электродинамики лежит полная система уравнений Максвелла. Кроме того, для упрощения физической трактовки ряда явлений при решении задач используются сформулированные на их основе леммы и теоремы.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка. С точки зрения математики для получения решения необходимо задать либо начальные значения функции, либо начальные значения производной функции, входящей в данные уравнения. Теорема единственности позволяет не только сформулировать математические начальные условия, но учесть физику процесса, задав граничные условия для описания поверхности тела, а также условия излучения для исключения верного с точки зрения математики, но физически нереализуемого решения.

Теорема единственности утверждает, что электромагнитное поле в любой момент времени в любой точке объема определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если в каждой точке объема даны начальные значения векторов напряженности электрического и магнитного полей и если известны граничные значения касательных проекций одного из векторов в точках поверхности S для любого момента времени. Доказательство данной теоремы осуществляется с использованием условий излучения, рассмотренных выше.

Одним из эффективных математических приемов, используемом при решении в общей форме задачи возбуждения электромагнитного поля в пространстве

Электродинамика и распространение радиоволн

с произвольно расположенными неоднородностями, а также при доказательстве ряда принципиальных положений в электродинамике, является **лемма Лоренца**. Данная лемма выводится на основе использования двух первых уравнений Максвелла и звучит следующим образом. Если система сторонних источников $\vec{j}_1^{cm.э}$, $\vec{j}_1^{cm.м}$, показанная на рисунке 2.4, возбуждает в пространстве электромагнитный процесс \vec{E}_1, \vec{H}_1 , в то время как системе $\vec{j}_2^{cm.э}$, $\vec{j}_2^{cm.м}$ отвечают поля \vec{E}_2, \vec{H}_2 , то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] &= \vec{j}_1^{э.см.} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{м.см.} \vec{H}_2 - \\ &- \vec{j}_2^{э.см.} \vec{E}_1 + \vec{j}_2^{м.см.} \vec{H}_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

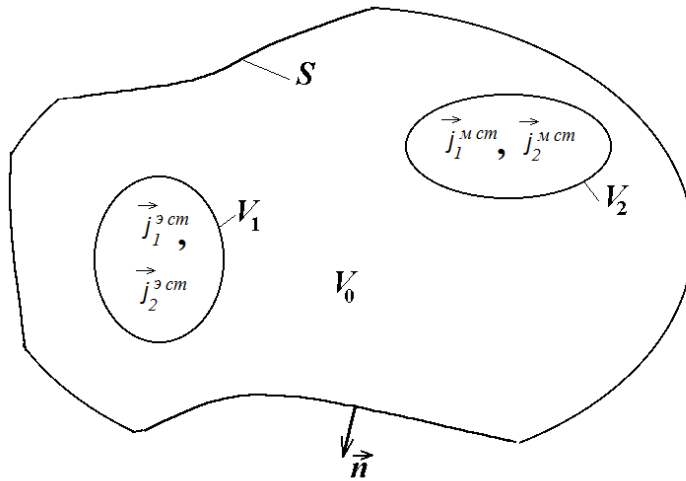


Рисунок 2.4 – Иллюстрация леммы Лоренца

Более содержательной в физическом смысле и широко используемой при решении электродинамических задач является интегральная форма леммы Лоренца:

$$\begin{aligned} \oint_S \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} d\vec{s} &= \\ &= \int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{э.см.} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{м.см.} \vec{H}_2 \right\} dv - \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{э.см.} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{м.см.} \vec{H}_1 \right\} dv. \end{aligned} \quad (2.11)$$

На основе леммы Лоренца может быть сформулирован один из важнейших принципов электродинамики – **принцип взаимности**. Для этого в лемме Лоренца полагаем, что сторонние токи сосредоточены в ограниченной области, а поверхность S имеет бесконечный радиус. Если первые сторонние токи сосредоточены в области V_1 , а вторые сторонние токи – в области V_2 , то соотношение (2.11) можно записать в виде:

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{э.см}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м.см}} \vec{H}_2 \right\} dv = \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{э.см}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{м.см}} \vec{H}_1 \right\} dv. \quad (2.12)$$

Анализ соотношения (2.12) показывает его симметрию, совершенно независимую от характеристик среды. Единственное ограничение заключается в предположении об изотропности среды.

Одним из важнейших и наиболее часто используемых следствий леммы Лоренца, находящем применение в различных областях радиофизики, теории и техники антенн, является **теорема эквивалентных токов**. Эквивалентность тангенциальных составляющих полей и токов в электродинамике получила название **теоремы эквивалентных поверхностных токов**. Указанная теорема позволяет находить поле в любой точке пространства при известном решении задачи дифракции – поле вспомогательного диполя и известном распределении полей на поверхности S .

Рассмотрим краткий вывод и выделим основные моменты, существенные для последующего излучения. Пусть в формуле (2.12) поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 будет искомым (обозначим его \vec{E}, \vec{H} , токи $\vec{j}_1^{\text{э}}, \vec{j}_1^{\text{м}}$ обозначим $\vec{j}^{\text{э}}, \vec{j}^{\text{м}}$), а поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 – вспомогательным. В качестве вспомогательного возьмем поле электрического диполя с единичным моментом, ориентированным вдоль вектора \vec{a} . Обозначим вспомогательное поле через $\vec{E}_\varepsilon, \vec{H}_\varepsilon$. Тогда $\vec{j}_2^{\text{э}} = \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\vec{j}_2^{\text{м}} = 0$. Подставляя данное распределение тока в (2.12), получаем

$$\vec{a} \vec{E}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_\varepsilon - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_\varepsilon \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_\varepsilon + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_\varepsilon \right\} ds. \quad (2.13a)$$

Аналогично, взяв в качестве вспомогательного поля $\vec{E}_\varepsilon^{\text{м}}, \vec{H}_\varepsilon^{\text{м}}$ магнитного диполя с единичным моментом и направленного вдоль вектора \vec{b} (при этом $\vec{j}_2^{\text{м}} = \vec{b} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\vec{j}_2^{\text{э}} = 0$), получим

$$\vec{b} \vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_\varepsilon^{\text{м}} - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_\varepsilon^{\text{м}} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_\varepsilon^{\text{м}} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_\varepsilon^{\text{м}} \right\} ds. \quad (2.13б)$$

В формулах (2.13a) и (2.13б) векторы $\vec{J}^{\text{э}} = [\vec{n}, \vec{H}]$ и $\vec{J}^{\text{м}} = -[\vec{n}, \vec{E}]$ являются, напомним, эквивалентными поверхностными токами, а сами соотношения описывают **теорему эквивалентных токов**.

2.3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

Введем понятие стороннего источника. **Сторонними источниками** электромагнитного поля называют такие источники, которые возбуждают данное поле,

Электродинамика и распространение радиоволн

но сами от него не зависят, так как их поддерживают посторонние по отношению к исследуемому полю физические явления.

Электромагнитное поле является носителем энергии. Пусть среда является линейной и изотропной. Выделим мысленно объем V , в котором существуют сторонние источники электромагнитного поля. Энергия в выделенном объеме может изменяться во времени за счет двух процессов:

- внутри данного объема электромагнитная энергия может превращаться в другие, неэлектромагнитные формы энергии (внутренняя энергия тел, называемая часто тепловой энергией, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т.д.), или же возникающая из неэлектромагнитных форм;

- энергия, оставаясь электромагнитной, может вытекать из данного объема или втекать в него через поверхность S , ограничивающую данный объем.

Математическая запись данного утверждения имеет вид:

$$p_{\text{ст}} = P + \frac{dw}{dt} + \wp, \quad (2.14)$$

где $p_{\text{ст}}$ - мощность поля, создаваемая сторонними источниками; P - мощность, отдаваемая полем веществу; dw/dt - мощность, идущая на изменение энергии электромагнитного поля в объеме V ; \wp - мощность поля, выходящая сквозь замкнутую поверхность S , которая ограничивает объем V и называемая **потокм мощности** или же **мощностью излучения**. Единица измерения мощности – Вт=Дж/с=А·В.

Используя первые два уравнения Максвелла (1.6а), (1.6б) и не учитывая потери энергии на поляризацию и намагничивание, формулу (2.14) можно преобразовать к виду:

$$\underbrace{\sigma \vec{E}^2}_{\text{нагрев вещества}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0 \mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right)}_{\text{колебательные процессы}} + \underbrace{\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]}_{\text{проход энергии (излучение)}} = \underbrace{-\vec{E} \vec{j}^{\text{ст}}}_{\text{энергия стороннего источника}}, \quad (2.15)$$

называемому **теоремой Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме**.

После интегрирования соотношения (2.17) по выделенному объему V , получаем **теорему Умова-Пойнтинга в интегральной форме**:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} + \int_V \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \int_V \sigma \vec{E}^2 dv = - \int_V \vec{j}^{\text{э.см.}} \vec{E} dv. \quad (2.16)$$

К числу основных положений электродинамики принадлежат следующие выражения для отдаваемой мощности P и мощности излучения \wp :

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dv, \quad (2.17)$$

$$\wp = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}. \quad (2.18)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

В соотношениях (2.15), (2.16), (2.18) получаемый в результате векторного умножения вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (2.20)$$

называется **вектором Пойнтинга**, определяет **плотность потока мощности**, а также направление распространения волны. Единицами измерения которой, как следует из (2.20), являются В/м·А/м=Вт/м².

Дадим физическую трактовку входящих в соотношение (2.16) членов. Первое слагаемое описывает поток энергии или мощность излучения через замкнутую поверхность S . Третье слагаемое есть работа, совершаемая электромагнитным полем. В правой части стоит величина, определяющая работу сторонних сил. Второе слагаемое определяет изменение энергии (мощности) электромагнитного поля во времени. Второе слагаемое в (2.16) может быть представлено в виде двух слагаемых, описывающих энергию электрического и магнитного полей:

$$W = W^M + W^Э, \quad (2.21)$$

где
$$W^M = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \vec{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dv, \quad (2.22a)$$

$$W^Э = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \vec{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dv. \quad (2.22b)$$

Комплексный вектор Пойнтинга в данном случае будут описываться выражениями:

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*]. \quad (2.23)$$

Введем понятия активного, нейтрального и пассивного балансов. **Баланс** считается **активным**, когда $\wp > 0$, т.е. преобладает отдача энергии во внешнее пространство. Если $\wp = 0$, то **баланс** считается **нейтральным**. **Пассивный баланс** соответствует случаю, когда поглощение преобладает над излучением.

Тема 2. Излучение элементарных источников

Лекция № 3. Электродинамические потенциалы электромагнитного поля

3.1 Возбуждение электромагнитного поля заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме

Одним из важнейших результатов, полученных Максвеллом, явилось доказательство волновой природы электромагнитного поля: изменение во времени электрического поля приводят к изменению магнитного поля, неоднородного в пространстве, и наоборот. В физике колебательное движение непрерывной среды принято называть **волновым процессом**. Волновые уравнения и уравнения Гельмгольца для гармонических сигналов, полученные из уравнений Максвелла на первой лекции, являются моделью данного процесса. Решением данных дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид:

$$u(x, t) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad (3.1)$$

Каждое из двух входящих в соотношение (3.1) частных решений представляет собой так называемую **волновую функцию** или **волну**. Волна имеет произвольную форму и распространяется в свободном пространстве в двух противоположных направлениях со скоростью света. Первое слагаемое представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении (расходящейся волны), второе слагаемое - волну, приходящую из бесконечности со скоростью света (сходящаяся волна).

Кроме того, из уравнения баланса энергии для переменного электромагнитного поля следует, что электромагнитная энергия переносится волнами из объема, где действуют переменные сторонние токи, в окружающее этот объем пространство, где этих токов нет.

Процесс распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью и утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами), называется **излучением электромагнитных волн**.

Во многих практических задачах часто требуется непосредственно связать величину сторонних электрических токов, являющихся источниками электромагнитного поля, с векторами \vec{E} и \vec{H} в любой точке пространства, т.е. определить структуру электромагнитного поля. К таким задачам относятся, прежде всего, большинство задач из теории излучающих антенн. С математической точки зрения задачи о возбуждении электромагнитных волн заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{э.ст.}}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^{\text{м.ст.}}, \quad (3.2a)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст}}, \quad \mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст}}. \quad (3.26)$$

Соответственно для гармонических сигналов в вакууме ($\sigma = 0$) первые два уравнения Максвелла могут быть записаны в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - i\omega\varepsilon_a \vec{E} &= \vec{j}^{\text{см.э}}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + i\omega\mu_a \vec{H} &= -\vec{j}^{\text{см.м}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В соотношениях (3.1) и (3.2) $\vec{j}^{\text{см.э}}$ и $\vec{j}^{\text{см.м}}$ – векторы объемных плотностей сторонних электрического и магнитного токов; $\rho^{\text{э.ст}}$, $\rho^{\text{м.ст}}$ – соответственно сторонние электрический и магнитный заряды.

Кроме того, для получения единственного решения системы (3.2) и (3.3) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями.

3.2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля

Непосредственное решение системы уравнений Максвелла для случая сторонних источников, как и неоднородных волновых уравнений весьма сложно. Одним из наиболее простых способов решения задачи об излучении является применение искусственного приема, заключающегося в использовании потенциалов электромагнитного поля. **Потенциалы электромагнитного поля** – это энергетические характеристики, которые вводятся для описания поля наряду с силовыми характеристиками – напряженностью электрического поля \vec{E} и индукцией магнитного поля \vec{B} .

Вспомогательный векторный потенциал $\vec{A}^{\text{э}}$ вводится с помощью четвертого уравнения Максвелла

$$\mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}^{\text{э}}. \quad (3.4)$$

Поскольку дивергенция вихря произвольного вектора равна фиктивному магнитному заряду, равному нулю, то данное соотношение является справедливым.

Выражение для электрического скалярного потенциала может быть получено путем подстановки соотношения (3.3) во второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме и изменении порядка дифференцирования. В результате преобразований данное уравнение Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}^{\text{э}}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Учитывая тождество $\text{rot grad } u = 0$, можно положить, что стоящее под знаком rot выражение равно $\text{grad } u^\vartheta$, где u^ϑ - некоторая скалярная функция. Следовательно,

$$\vec{E} = -\text{grad } u^\vartheta - \frac{\partial \vec{A}^\vartheta}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Знак «минус» перед $\text{grad } u^\vartheta$ введен для того, чтобы в случае электростатического поля функция совпадала с обычным выражением для электростатического потенциала.

Подставив выражения (3.4) и (3.6) в первое уравнение Максвелла и учитывая материальные уравнения, получим

$$(\mu_0 \mu)^{-1} \text{rot rot } \vec{A}^\vartheta = \vec{j}^{\vartheta cm} - \varepsilon_0 \varepsilon \left(\text{grad } \frac{\partial u^\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}^\vartheta}{\partial t^2} \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^\vartheta}{\partial t} - \sigma \text{grad } u^\vartheta. \quad (3.7)$$

После преобразования с использованием тождества $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$ левой части уравнения (3.7) перейдем к равенству

$$\nabla^2 \vec{A}^\vartheta - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^\vartheta}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \vec{j}^{\vartheta cm} + \text{grad} \left(\text{div } \vec{A}^\vartheta + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^\vartheta}{\partial t} + \sigma u^\vartheta \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^\vartheta}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Упростим полученное соотношение. Как уже отмечалось, вектор \vec{A}^ϑ был определен с точностью до градиента произвольной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор \vec{A}^ϑ удовлетворял дополнительному условию

$$\text{div } \vec{A}^\vartheta + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^\vartheta}{\partial t} + \sigma u^\vartheta = 0. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) принято называть **условием калибровки (калибровка Лоренца)**. С учетом калибровки волновое уравнение (3.8) приобретает вид

$$\nabla^2 \vec{A}^\vartheta - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^\vartheta}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}^\vartheta}{\partial t} - \mu_0 \mu \vec{j}^{\vartheta cm}. \quad (3.10)$$

Аналогичное уравнение получается и для скалярного потенциала u^ϑ :

$$\nabla^2 u^\vartheta - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 u^\vartheta}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial u^\vartheta}{\partial t} - \frac{\rho^{\vartheta cm}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.11)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Введенные здесь электродинамические потенциалы рассматриваются в представлении $\vec{j}^{mct} = 0$ и $\rho^{mct} = 0$. Это соответствует случаю, когда электромагнитное поле возбуждается только сторонними электрическими токами и зарядами. Именно поэтому рассматриваемые функции \vec{A}^e и u^e получили название соответственно **электрического векторного и электрического скалярного потенциалов**. Размерность электрических векторного и скалярного потенциалов соответственно [В·с/м] и [А·Гн/м].

В случае, когда источниками электромагнитного поля могут являться также и формально введенные магнитные токи и заряды, вводятся соответственно магнитные векторный и скалярный потенциалы. Связь векторного магнитного потенциала с вектором напряженности электрического поля определяется соотношением:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^m. \quad (3.12)$$

Выражения для магнитных потенциалов получаются аналогичными рассуждениями, но при использовании второго уравнения Максвелла и соотношения (3.12). Окончательно, можно записать:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} u^m - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} - \sigma \vec{A}^m, \quad \operatorname{div} \vec{A}^m + \mu_0 \mu \frac{\partial u^m}{\partial t} = 0, \quad (3.13)$$

$$\nabla^2 \vec{A}^m - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^m}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t} = -\vec{j}^m, \quad \nabla^2 u^m - \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^m}{\partial t} = \frac{\rho^m}{\mu_0 \mu}. \quad (3.14)$$

Единицей измерения скалярного магнитного потенциала является [А]. В отличие от калибровки Лоренца для электрических потенциалов (3.9) при введении калибровки для магнитных потенциалов понятие магнитной проводимости не вводилось, поэтому в данном выражении отсутствует третье слагаемое.

Совокупность уравнений (3.10), (3.11), (3.13) и (3.14) описывает соотношения для мгновенных значений электродинамических потенциалов.

3.3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов

Для получения аналогичных соотношений для комплексных амплитуд перейдем от мгновенных значений электродинамических потенциалов к комплексным амплитудам электродинамических потенциалов. При переходе так же, как и ранее, будем учитывать, что $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$, $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$.

Электродинамика и распространение радиоволн

В результате для векторного и скалярного электрических потенциалов однородных и изотропных сред, в которых отсутствуют магнитные потери ($\tilde{\mu}_a = \mu_0 \mu$) и диэлектрический гистерезис ($\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 \varepsilon - i\sigma^3 / \omega$) записывается следующая совокупность уравнений:

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot } \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}), \quad (3.15)$$

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^{\circ}(\vec{r}) - i\omega\mu_0 \mu \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}). \quad (3.16)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}) = -\vec{j}^{\circ cm}, \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 u_m^{\circ}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\circ}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\circ ct}}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (3.18)$$

где $\gamma = ik = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = k_{\alpha} - ik_{\beta}$ - коэффициент распространения, являющийся в общем случае комплексной величиной; k_{α} - коэффициент затухания; k_{β} - коэффициент фазы.

Аналогичная совокупность уравнений может быть записана и для магнитных векторного и скалярного электродинамических потенциалов:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{rot } \vec{A}_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}), \quad (3.19)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\text{grad } u_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}) - \tilde{\varepsilon}_a \vec{A}_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}), \quad (3.20)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}) = -\vec{j}_m^{\mathcal{M} cm}, \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 u_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\mathcal{M}}(\vec{r}) = -\frac{\rho_m^{\mathcal{M} cc}}{\mu_0 \mu}. \quad (3.22)$$

В соотношениях (3.17), (3.18), (3.21), (3.22), называемых **неоднородными уравнениями Гельмгольца** относительно комплексных амплитуд векторных и скалярных электродинамических потенциалов.

По найденным значениям векторных потенциалов определяются компоненты электромагнитного поля:

$$\vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{A}^{\circ} + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a} \text{grad div } \vec{A}^{\circ} - \text{rot } \vec{A}^{\mathcal{M}}, \quad (3.23)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\circ} - i\omega\tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^{\circ} + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^{\circ}. \quad (3.24)$$

3.4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца

Решение неоднородных уравнений Гельмгольца поясним на примере решения неоднородных волновых уравнений для электрических векторного и скалярного электродинамических потенциалов, записанных для однородных и изотропных сред, в которых отсутствуют магнитные потери и диэлектрический гистерезис. При этом будем считать, что волновое число имеет комплексное значение: $\tilde{k} = k_{\beta} - ik_{\alpha}$. Это позволяет переписать уравнения (3.17), (3.18) в уже рассматриваемом ранее виде неоднородных волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 \vec{A}_m^{\circ}(\vec{r}) = -\vec{J}^{\circ cm}, \quad (3.25)$$

$$\nabla^2 u_m^{\circ}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 u_m^{\circ}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\circ ct}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.26)$$

Несложно заметить, что данные уравнения являются неоднородными волновыми уравнениями. Их решение начинается с предположения, что источник поля (сторонний электрический ток с вектором объемной плотности $\vec{j}^{\circ ct}$) занимает весьма малую область $\Delta V \rightarrow 0$ вблизи начала координат. Во всем остальном пространстве поле удовлетворяет однородным волновым уравнениям, т.е. уравнениям (3.25), (3.26) с нулевой правой частью. В силу сферической симметрии решения скалярного уравнения (3.26) относительно источника будем считать решение не зависящим от углов φ, θ в сферической системе координат, т.е. $\partial u_m^{\circ} / \partial \varphi = 0, \partial u_m^{\circ} / \partial \theta = 0$. Тогда лапласиан из (3.26) упрощается, а решение представляет собой две сферических волны, распространяющихся от источника в сторону возрастания значений r (расходящуюся волну) и сходящуюся к источнику волну. Причем существование второй волны не удовлетворяет условиям излучения и принципу причинности (причина должна опережать следствие).

В результате решение задачи принимает вид

$$u_m^{\circ}(\vec{r}) = \frac{B}{r} \exp(-i\tilde{k}r). \quad (3.27)$$

Коэффициент B пропорционален интенсивности источника. С понижением частоты коэффициент распространения $\tilde{k} \rightarrow 0$, и естественно предположить, что в пределе данное выражение совпадает с выражением для поля электростатического заряда, т.е.

$$B = \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \Delta V}{4\pi\epsilon_a} . \quad (3.28)$$

Возвращаясь к произвольной частоте и считая объем V , где расположены сторонние силы, также произвольным, получаем

$$u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \exp(-ikr)}{4\pi\epsilon_a r} dv . \quad (3.29)$$

Представляя векторное уравнение тремя скалярными проекциями в декартовой системе координат и применяя полученное решение для каждой из проекций с заменами

$$\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\epsilon_a} \rightarrow \tilde{\mu}_a \vec{J}_{m,x,y,z}^{\text{э.ст}}, \quad u_m^{\text{э}} \rightarrow A_{m,x,y,z}^{\text{э}}, \quad (3.30)$$

получим решение для векторного электродинамического потенциала:

$$\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \vec{J}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-ikr)}{r} dv . \quad (3.31)$$

Используемые в соотношении (3.31) обозначения показаны на рисунке 3.1.

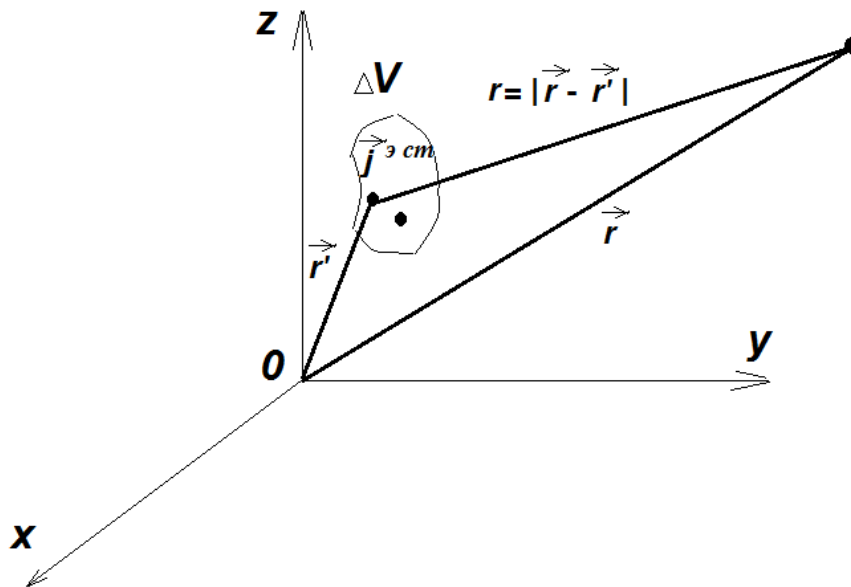


Рисунок 3.1 – Пояснения к соотношению (3.31)

Следует также отметить, что соотношение (3.31) называется **интегралом Кирхгофа для запаздывающих потенциалов**. Оно удовлетворяет условиям теоремы единственности для внешней задачи электродинамики. Экспоненциальный множитель соответствует конечной скорости распространения волны от источника со скоростью $v = \omega / \beta$, благодаря чему его воздействие доходит до точки с радиус-вектором \vec{r} с запаздыванием на время

$$t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}. \quad (3.34)$$

Здесь $k_\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ - коэффициент фазы, или действительная часть волнового числа свободного пространства.

Таким образом, из анализа соотношения (3.34) следует, что векторный потенциал в точке с радиус-вектором \vec{r} в момент времени t является функцией токов в точке расположения источников, существовавших в более ранний момент времени. Данное положение называется **теоремой запаздывающих потенциалов**, а электродинамические потенциалы называются запаздывающими.

Поскольку токи и заряды меняются по гармоническому закону, то экспоненциальный множитель в среде без потерь записывается в виде

$$\exp[i\omega(t - r/v)] = \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/v) = \exp(i\omega t) \exp(-ik_\beta r). \quad (3.35)$$

Таким образом, применительно к гармоническим процессам запаздывание на время $t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}$ учитывается множителем $\exp(-ik_\beta r)$ и означает сдвиг по фазе на величину $\omega r/v$.

Лекция N 4 Электромагнитные поля элементарных источников

4.1 Общие характеристики электромагнитного поля элементарных источников

В предыдущей лекции было рассмотрено понятие излучения, при котором излучаемое электромагнитное поле порождается действием сторонних сил, описываемых сторонними зарядами и токами. Полученное решение задачи об излучении было записано с использованием электродинамических потенциалов, которые для гармонических полей определяются формулой:

$$\vec{A}_m^{(м)}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a(\vec{\varepsilon}_a)}{4\pi} \int_V \vec{J}_m^{(м).ст}(\vec{r}') \frac{\exp(-ikr)}{r} dv. \quad (4.1)$$

Экспоненциальный множитель, входящий в данное выражение представляет собой **функцию Грина свободного пространства** $G(\vec{r}, \vec{r}')$ (\vec{r} - радиус-вектор, описывающей точку, в которой определяется поле; \vec{r}' - радиус-вектор, описывающей положение точки источника; $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$). Последняя является решением соответствующего волнового уравнения или уравнения Гельмгольца при правой части в виде дельта-функции Дирака. Единицы ее измерения - м⁻¹.

Функция Грина является истокообразной, т.е. описывает возбуждение поля. Математически данное явление соответствует обращению в нуль знаменателя,

Электродинамика и распространение радиоволн

т.е. случай, когда расстояние между точкой, в которой расположен источник, и точкой, в которой ищется поле, совпадают.

Для нахождения структуры поля, возбуждаемого сторонним источником, необходимо подставить выражение в соотношение для электродинамического потенциала (4.1) конкретное распределение тока, а затем полученное выражение в соотношения, связывающие компоненты электромагнитного поля с электродинамическими потенциалами.

Приведем окончательные выражения, получаемые для компонент электромагнитного поля, возбуждаемого источниками магнитного и электрического типов. Так, если источник поля является магнитным, то вектор напряженности магнитного поля будет определяться выражением:

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{ik}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left[\vec{j}_m^{cm}(\vec{r}'), \vec{r}_0 \right] \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dv'. \quad (4.2)$$

Для источников электрического типа выражение для вектора напряженности электрического поля будет иметь вид:

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{ik}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left[\vec{j}_m^{cm}(\vec{r}'), \vec{r}_0 \right] \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dv'. \quad (4.3)$$

В соотношениях (4.2) и (4.3) радиус-вектор \vec{r}_0 определяется соотношением:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.4)$$

Выполним анализ поля излучения на основании представления компонент поля соотношениями (4.2) и (4.3). Подынтегральные выражения представляют собой сумму двух членов. Отношение слагаемых в подынтегральных функциях обоих выражений равно $ik|\vec{r} - \vec{r}'|$. Для непоглощающей среды величина $k=2\pi/\lambda$ является вещественной. В зависимости от соотношения величин $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и λ может преобладать первый или второй член. Если величина $|\vec{r} - \vec{r}'|$ достаточно велика по сравнению с длиной волны и размерами области источников, то компоненты векторов электромагнитного поля все более приобретают пространственное распределение типа сферической волны. Данная область получила название **дальней (волновой) зоны или зоны излучения**, поскольку поле в данной зоне удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда.

Электродинамика и распространение радиоволн

Если область источников мала по сравнению с длиной волны, то можно указать такую область расстояний $|\vec{r} - \vec{r}'| \ll \lambda$, когда преобладает первый член выражения. Данная область получила название ближней зоны.

Помимо указанных зон выделяют третью – промежуточную, в которой $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx \lambda$.

На рисунке 4.2 проиллюстрированы описанные выше области излучения источника. При этом использовано следующее обозначение зон: 1 – ближняя зона, 2 – промежуточная зона, 3 – дальняя зона.

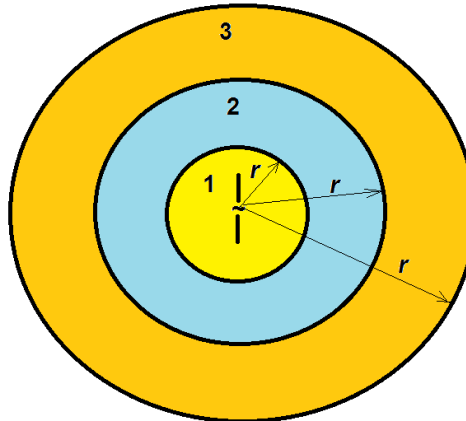


Рисунок 4.1 – Иллюстрация зон излучения источников

4.2 Поля элементарных электрического и магнитного вибраторов. Диаграмма направленности

Рассмотрение структуры поля начнем со случая элементарных излучателей электрического и магнитного типов. Дадим определение элементарного излучателя.

Элементарным электрическим излучателем называют элемент электрического линейного тока, характеризующийся следующими особенностями: во-первых, его длина весьма мала по сравнению с длиной волны создаваемого им поля и, во-вторых, в каждый момент времени ток имеет одно и то же значение. Примером реализации элементарного электрического излучателя является диполь Герца - вибратор длиной ℓ значительно меньшей длины волны в вакууме λ и радиусом $a \ll \ell$, по которому протекает переменный электрический ток I_0 .

Элементарный магнитный излучатель – это воображаемый «проводник» длиной $\ell \ll \lambda$, по которому протекает фиктивный магнитный ток I_0^m . Примерами реализации элементарного магнитного излучателя являются рамка с током, а также щель в металлическом экране.

Рассмотрим структуру поля элементарного электрического излучателя. Прежде, чем записать вектор плотности тока \vec{j} в излучателе, сделаем несколько замечаний общего плана. Во-первых, об используемой системе координат. Для того чтобы получаемые выражения для компонент поля можно было разделить,

Электродинамика и распространение радиоволн

используется та система, координат, в которой одна из координатных поверхностей совпадает с поверхностью излучателя. Так, для точечного излучателя может применяться как декартова, так и сферическая системы координат. Для протяженных линейных источников, например, нитей электрического или магнитного тока, используется цилиндрическая система координат. Во-вторых, в выбранной системе координат источник обычно ориентируют таким образом, чтобы его образующая совпадала с осью Oz . Отсчет одного из углов осуществляется от оси вибратора.

С учетом сделанных выше замечаний для описания распределения тока в элементарном электрическом излучателе введем декартову систему координат, как показано на рисунке 4.2, и предположим, что излучатель ориентирован вдоль оси Oz .

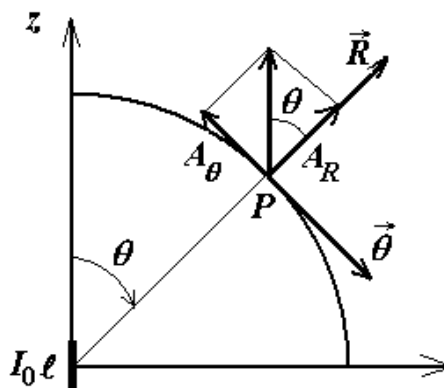


Рисунок 4.2 – Геометрия задачи нахождения поля элементарного электрического излучателя

Распределение тока в излучателе в этом случае будет описываться выражением:

$$\vec{j}^{\circ}(\vec{r}') = \vec{z} I_0 \delta(x - 0) \delta(y - 0) \delta(z - 0). \quad (4.5)$$

Нахождение составляющих электромагнитного поля произведем путем подстановки распределения тока (4.5) в соотношение (4.3).

По условию вибратор является источником электрического типа, следовательно, найдем векторный электрический потенциал. Подставляя выражение (6) в соотношение для векторного электрического потенциала (4.1) и учитывая основные свойства дельта-функции Дирака, после интегрирования по объему, в котором сосредоточен источник, в декартовой системе координат получаем:

$$\vec{A}^{\circ}(\vec{r}) = \vec{z} \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell. \quad (4.6)$$

Далее для представления потенциала в каждой точке пространства (например, в точке P) перейдем от декартовой системы координат $Oxyz$ к сферической системе координат $OR\theta\phi$. После преобразования, выполненного с использова-

Электродинамика и распространение радиоволн

нием рисунка 1, компоненты векторного электрического потенциала будут иметь вид:

$$A_R^z = \left| \vec{A}^z \right| \cos \theta = \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell \cos \theta, \quad (4.7a)$$

$$A_\theta^z = -\left| \vec{A}^z \right| \sin \theta = -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} I_0 \ell \sin \theta, \quad (4.7b) \quad A_\varphi^z = 0. \quad (4.7b)$$

Подставляя компоненты векторного электрического потенциала в соответствующие соотношения для компонент электромагнитного поля, получаем:

$$H_R = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi r^2} (1 + ikr) \sin \theta \exp(-ikr),$$

$$E_R = \frac{I_0 \ell}{2\pi \omega \varepsilon_a r^3} (1 + ikr) \cos \theta \exp(-ikr),$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell}{4\pi \omega \varepsilon_a r^3} (1 + ikr - k^2 r^2) \sin \theta \exp(-ikr), \quad E_\varphi = 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим структуру поля в выделенных выше зонах: ближней и дальней. В ближней зоне все три возможные составляющие поля - E_R , E_θ и H_φ - отличны от нуля:

$$H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi r^2} \sin \theta, \quad E_R = \frac{-iI_0 \ell}{2\pi \omega \varepsilon_a r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{-iI_0 \ell}{4\pi \omega \varepsilon_a r^3} \sin \theta. \quad (4.9)$$

При описании поля в дальней зоне можно отбросить слагаемые, имеющие порядок r^{-2} , т.е. можно пренебречь составляющей поля E_R по сравнению с E_θ . Следовательно, компоненты электромагнитного поля будут определяться только двумя компонентами

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell k^2}{4\pi \omega \varepsilon_a} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (4.10)$$

Компоненты поля элементарного магнитного излучателя могут быть получены на основе использования **принципа двойственности**:

$$H_\theta = \frac{I^m_0 \ell k^2}{4\pi \omega \mu_a} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad E_\varphi = -\frac{I^m_0 \ell}{4\pi} \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (4.11)$$

Анализ формул (4.10) и (4.11) показывает, что возбуждаемые элементарными излучателями поля представляют собой уходящие на бесконечность сферические волны, что математически описывается множителем $\exp(-ikr)/r$. В дальней зоне (при $r \rightarrow \infty$) поле является квазиплоским (отсутствует R -компонента поля), как показано на рисунке 4.3. На данном рисунке обозначение $\langle P(t) \rangle$ соответствует вектору Пойнтинга, т.е. направлению распространения волны.

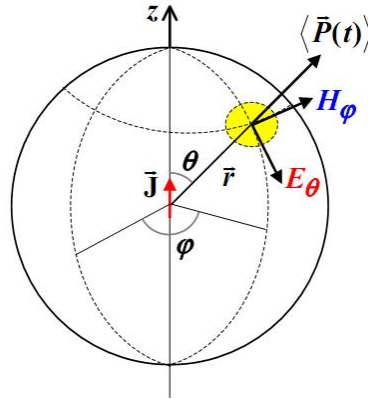


Рисунок 4.3 – Соотношения компонент поля элементарного излучателя в дальней зоне

Соотношение между компонентами поля является постоянной величиной, называемой **волновым сопротивлением свободного пространства**

$$\frac{E_{\theta}}{H_{\varphi}} = -\frac{E_{\varphi}}{H_{\theta}} = W_0 = 120\pi \text{ Ом.} \quad (4.12)$$

Из формул (4.10) и (4.11) следует, что элемент как электрического, так и магнитного токов вообще не излучает в направлении своей оси ($\theta=0^\circ$), а в экваториальной плоскости ($\theta=90^\circ$) излучение максимально.

Распределение поля излучения в пространстве при $R=\text{const}$ характеризуется при помощи функции, называемой **характеристикой направленности**:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|U(\theta, \varphi)|}{|U(\theta, \varphi)|_{\max}}. \quad (4.13)$$

Традиционно для излучателей электрического типа используется характеристика направленности, полученная относительно распределения электрического поля ($U = E$), а для излучателей магнитного типа – относительно распределения магнитного поля ($U = H$). Для элементарных электрического и магнитного излучателей характеристика направленности имеет вид:

$$F(\theta, \varphi) = |\sin \theta|. \quad (4.14)$$

График этой функции называется **диаграммой направленности**. Диаграмма направленности может быть построена в декартовой системе координат, в полярной системе координат, в цилиндрической системе координат, в сферической системе координат, в обобщенной системе координат.

На рисунке 4.4 показаны диаграммы направленности в сферической системе координат для различных типов излучателей: диполя – рисунок 4.4,а, и более сложных антенн – рисунке 4.4,б,в. При этом первая диаграмма имеет форму тора, вторая – конусная, третья – веерная.

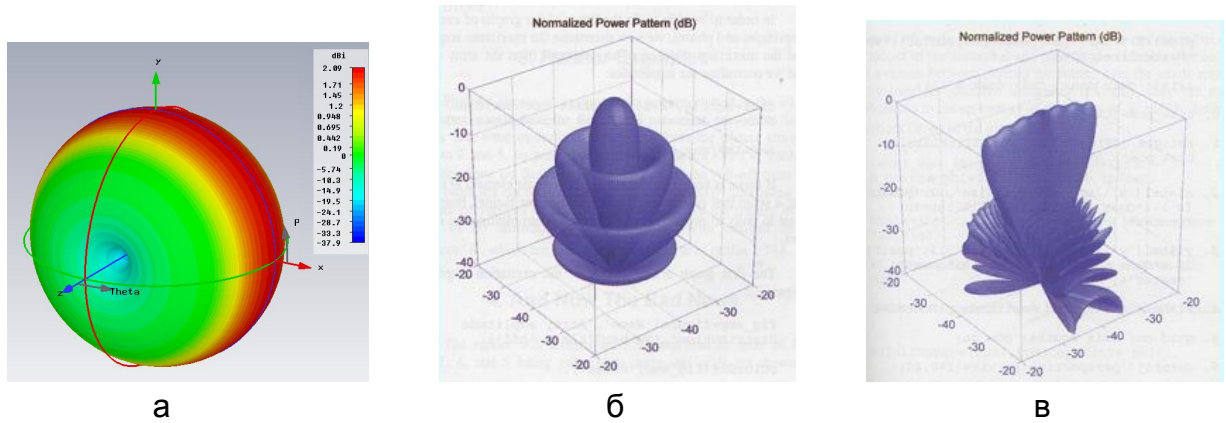


Рисунок 4.4 – Диаграммы направленности различных типов излучателей

4.3 Сферические волны. Поле электрического и магнитного вибраторов

Перейдем к рассмотрению поля излучения, создаваемого источниками, имеющими конечные размеры L , однако, в отличие от элементарных излучателей, распределение тока вдоль излучателя не является постоянной величиной, а описывается законом

$$\vec{j}^{\text{cm}}(z) = \vec{i}_z \begin{cases} I^{\text{c}}(z) \exp[i\psi(z)], & z \in L, \\ 0 & z \notin L \end{cases}. \quad (4.15)$$

В данном соотношении $I^{\text{c}}(z)$ и $\psi(z)$ – заданные модуль и фаза тока.

Выражение для векторного электрического потенциала с использованием соотношения для функции Грина представим в виде:

$$\vec{A}^{\text{c}} = \vec{i}_x \frac{1}{4\pi} \int_L I^{\text{c}}(z') \exp[i\psi(z')] \frac{\exp(-ikr)}{r} dz', \quad (4.16)$$

в котором $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$.

Как и для элементарного электрического вибратора, векторный потенциал в произвольной точке пространства имеет только z -составляющую, а остальные компоненты (A_r , A_{ϕ}) равны нулю. Из равенства, связывающего векторный потенциал с вектором напряженности магнитного поля, получаем отличную от нуля компоненту поля:

$$H_{\phi} = -\frac{\exp(-ikr)}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_z^{\text{c}}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_z^{\text{c}}) \right\}. \quad (4.17)$$

Остальные компоненты (H_r , H_z) напряженности магнитного поля тождественно равны нулю. Далее, используя второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме, запишем равенства для компонент напряженности электрического поля в сферической системе координат

Электродинамика и распространение радиоволн

$$E_{\varphi} = 0, \quad E_r = \frac{\exp(-ikr)W}{kr \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_{\varphi}), \quad E_{\theta} = \frac{\exp(-ikr)W}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\varphi}). \quad (4.18)$$

При $kr \rightarrow \infty$ (в **дальней зоне**) при больших расстояниях от источника излучения поле имеет две поперечные относительно направления распространения синфазные составляющие. Несмотря на то, что фронт волны (поверхность фаз) представляет собой сферу, что определяется сомножителем $\exp(-ikr)$, поле зависит еще и от угловой координаты θ . Такая волна называется **неоднородной сферической волной**.

Используя принцип взаимности, несложно сразу описать сферическую волну, возбуждаемую магнитным током.

4.4 Цилиндрические волны. Структура поля линейного электрического и магнитного излучателей

Рассмотрим теперь случай, когда источник является протяженным - линейным электрическим и магнитным излучателем, которые как видно из названия отличаются только типом тока, протекающим по нити.

Физическими моделями таких излучателей являются бесконечно длинный провод с радиусом, намного меньшим длины волны, по которому протекает электрический ток, и спиральный излучатель, длина которого много больше радиуса витка a и $a \ll \lambda$.

Решение задач об излучении бесконечных прямолинейных нитей с токами удобно проводить в цилиндрической системе координат. В данной системе координат распределение тока в бесконечно длинном прямолинейном электрическом излучателе описывается выражением

$$\vec{j}^{cm}(\vec{r}) = \hat{i}_z I_0^3 \delta(r - a) \delta(\varphi - 0), \quad (4.19)$$

где I_0^3 – величина тока в точке питания.

Векторный электрический потенциал в цилиндрической системе координат определяется выражением:

$$\vec{A}^3(\vec{r}) = \hat{i}_z \frac{I_0^3}{4i} H_0^{(2)}(kr), \quad (4.20)$$

а отличные от нуля составляющие поля нити электрического тока имеют вид:

$$H_{\varphi} = \frac{I_0^3}{4i} k H_1^{(2)}(kr), \quad E_z = -\frac{I_0^3}{4i} k W_0 H_0^{(2)}(kr), \quad (4.21)$$

где $H_n^{(2)}(\cdot)$ - функция Ганкеля 2-го рода n -го порядка.

При $kr \rightarrow \infty$ данные компоненты поля при использовании асимптотического представления функции Ганкеля для больших значений аргумента могут быть представлены в виде:

$$H_{\varphi} = \sqrt{\frac{k}{8\pi r}} \exp[-ikr + i\pi/4], \quad E_z = -H_{\varphi} W_0. \quad (4.22)$$

Таким образом, электромагнитное поле, возбуждаемое нитью синфазного тока, распространяется в направлениях, перпендикулярных нити. Поле имеет две поперечные относительно направления распространения синфазные составляющие E_z и H_{φ} , т.е. возбуждаемое поле является T -волной. Фаза составляющих векторов поля волны меняется по r при $kr \rightarrow \infty$ по закону бегущей волны. Фронт волны представляет собой бесконечный цилиндр с осью, совпадающей с нитью тока (рисунок 4.5). Амплитуды составляющих векторов поля убывает с ростом r по закону,

определяемому функцией $\sqrt{\frac{1}{r}}$. Составляющие векторов поля однородны по азимутальному углу φ и по координате z . Волну этого типа называют **однородной цилиндрической волной**.

Для излучателя магнитного типа соответствующие компоненты поля в дальней зоне также могут быть получены с помощью принципа двойственности и имеют вид:

$$E_{\varphi} = -\frac{I_0^M}{4i} H_1^{(2)}(kr), \quad H_z = -\frac{I_0^M k}{4W} H_0^{(2)}(kr). \quad (4.23)$$

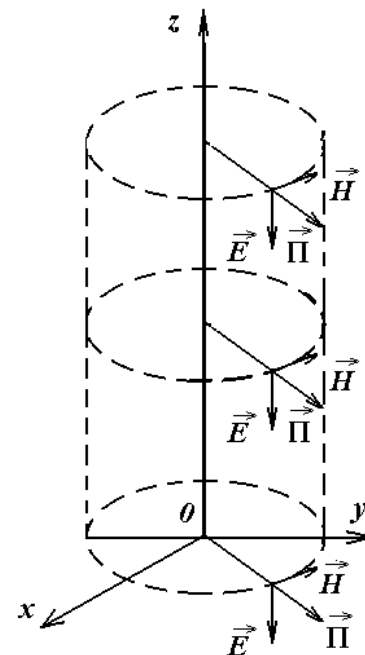


Рисунок 4.5 – Структура цилиндрической волны

Лекция N 5. Поле системы элементарных излучателей

5.1 Принцип Гюйгенса-Кирхгофа

При анализе конкретных излучающих систем распределение токов в системе часто бывает либо неизвестно, либо имеет крайне сложный характер. В то же время можно считать известным поле в некоторой замкнутой поверхности, охватывающей излучающую систему. В этих случаях поле, излучаемое системой, можно найти непосредственно по значениям векторов \vec{E} и \vec{H} на этой поверхности, т.е. вместо действительных источников используются их эквиваленты. Дан-

Электродинамика и распространение радиоволн

ное обстоятельство было отмечено при формулировке теоремы эквивалентных поверхностных токов.

Рассмотрим более подробно физическую интерпретацию данной теоремы.

Напомним, что данный искусственный прием (или метод) позволяет рассчитать электромагнитное поле любой ограниченной в пространстве системы источников, если известны касательные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} на некоторой замкнутой фиктивной поверхности S , охватывающей данные источники.

Эквивалентные поверхностные источники вводятся следующим образом. Пусть некоторое электромагнитное поле характеризуется векторами \vec{E} , \vec{H} , силовые линии которого приведены на рисунке 5.1,а. Предположим, что это же поле существует только в области 1 и отсутствует в области 2 (рисунок 5.1,б). Выясним, какие условия надо поставить на границе S (штриховая линия), чтобы их действие оказалось эквивалентным отображенному полю.

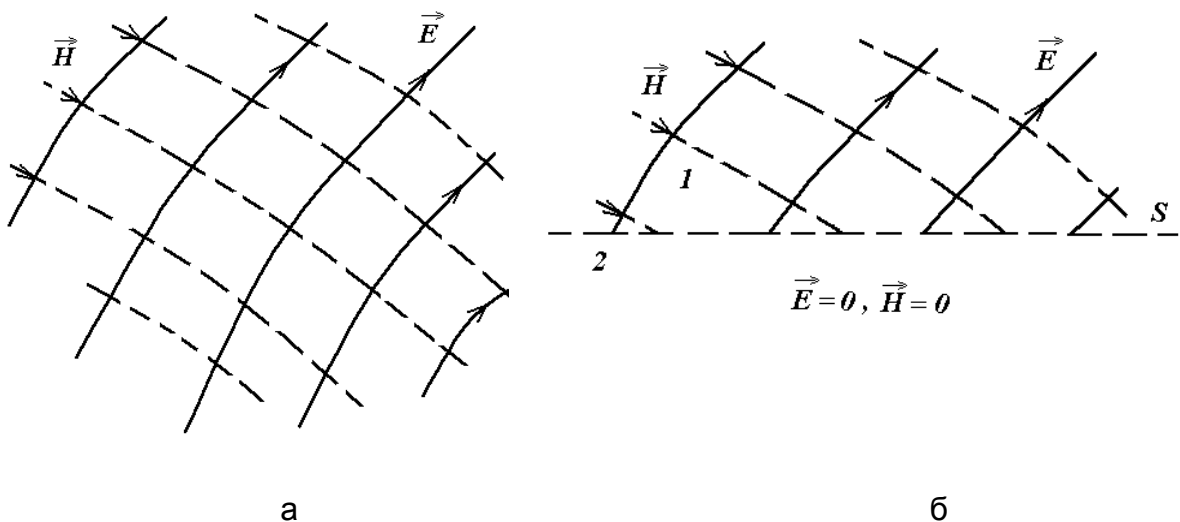


Рисунок 5.1 – Введение эквивалентных поверхностных источников

При переходе через границу S все компоненты векторов поля теперь будут обрываться. Как известно, разрывы нормальной компоненты вектора электрической индукции и тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля соответствуют существованию поверхностного электрического заряда и поверхностного электрического тока. Поскольку в области 2 ток отсутствует, то можно записать следующие выражения:

$$\rho = \varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E}^S, \vec{\nu}), \quad \vec{j} = [\vec{\nu}, \vec{H}^S] \quad (5.1)$$

(индекс S обозначает поля на границе раздела).

На границе S имеются также разрывы нормальной компоненты вектора магнитной индукции и тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля, что противоречит граничным условиям. Для устранения данного противоречия вводятся, как известно, понятия магнитного заряда и магнитного тока. Хотя с физической точки зрения магнитные заряды и токи не существуют, они могут быть определены при помощи соотношений

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\rho^M = \mu_0 \mu (\vec{H}^S, \vec{\nu}), \quad \vec{j}^M = [\vec{E}^S, \vec{\nu}]. \quad (5.2)$$

Таким образом, первоначальное поле \vec{E} , \vec{H} будет существовать в области 1 вплоть до границы S (без продолжения в область 2), если на поверхности S распределены электрические и магнитные заряды и токи, связанные с полем соотношениями (5.1) и (5.2). В теореме эквивалентных поверхностных токов для их обозначения используются понятия эквивалентных поверхностных токов.

Впервые это положение было сформулировано Гюйгенсом. Математическая формулировка принципа Гюйгенса впервые была дана Кирхгофом. В связи с этим данный принцип обычно называют **принципом Гюйгенса-Кирхгофа**, пояснения к которому даны на рисунке 5.2.



Рисунок 5.2 – Пояснение принципа Гюйгенса-Кирхгофа

Согласно этому принципу, каждую точку фронта некоторой волны можно принять за источник локальной сферической волны; новое положение фронта волны может быть найдено при учете действия всех локальных волн, т.е. при помощи условных поверхностных источников.

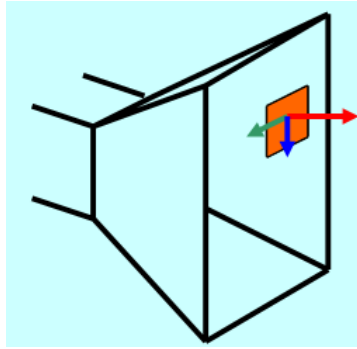
Под **фронтом волны** обычно понимается поверхность, отделяющую область, в которой в данный момент уже имеют место колебания, от области, в которую волна еще не успела распространиться. В случае монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в неограниченной области, под фронтом волны понимают любую поверхность равных фаз.

Сделанный вывод означает, что **поле в объеме можно рассматривать не только как результат излучения реальных сторонних источников (электрических токов и зарядов), но и как результат излучения эквивалентных источников, распределенных на некоторой поверхности. При этом для определения источников достаточно знать поле на поверхности.**

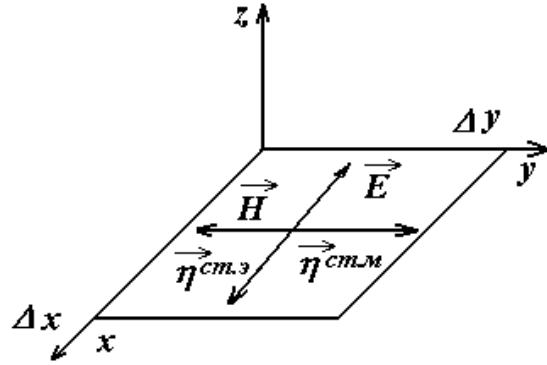
5.2 Излучатель Гюйгенса

Согласно принципу Гюйгенса, элементы поверхности S с заданным распределением поля могут фигурировать как элементарные излучатели (**элементы Гюйгенса**). Магнитное поле, действующее на данном элементе, заменяется эквивалентным поверхностным током, а электрическое поле – эквивалентным магнитным током.

Определим направленные свойства элемента Гюйгенса. Для этого рассмотрим простейший элемент в виде прямоугольной площадки $\Delta S = \Delta x \times \Delta y$ на плоскости $z=0$, нормальной фронту плоской однородной волны (рисунок 5.3,а).



а



б

Рисунок 5.3 – Введение элемента Гюйгенса

Плотности эквивалентных электрического и магнитного поверхностных токов, протекающих на поверхности $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (причем $\Delta x \ll \lambda$, $\Delta y \ll \lambda$), описываются во введенной системе координат выражениями:

$$\vec{\eta}^{cm.e} = [\vec{z}, \vec{H}], \quad \vec{\eta}^{cm.m} = [\vec{E}, \vec{z}]. \quad (5.3)$$

Поле в дальней зоне элемента Гюйгенса, расположенного в экваториальной плоскости сферической системы координат, записывается в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{ik|\vec{\eta}^{cm.e}|\Delta S W_0}{4\pi} (1 + \cos \theta) (\vec{\theta} \sin \varphi - \vec{\varphi} \cos \varphi) \frac{\exp(-ikr)}{r}, \\ \vec{H} &= -\frac{ik|\vec{\eta}^{cm.m}|\Delta S}{4\pi} (1 + \cos \theta) (\vec{\theta} \cos \varphi + \vec{\varphi} \sin \varphi) \frac{\exp(-ikr)}{r}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Формулы (5.4) получены на основе выражений для компонент поля элементарных электрического и магнитного вибраторов с учетом преобразования координат. Преобразование координат обусловлено тем, что при получении соотношений для каждого элементарно излучателя была использована система координат, в которой отсчет угла θ осуществляется от оси вибратора (соответственно, электрического и магнитного). При совмещении излучателей электрического и магнитного типов (образовании поверхностного элемента) отсчет угла φ осу-

Электродинамика и распространение радиоволн

ществляется от оси Ox , совпадающей с направлением плотности поверхностного электрического тока, а угла θ - от оси Oz , перпендикулярной плоскости поверхностного элемента.

Анализ соотношений (5.4) показывает, что, во-первых, структура поля в дальней зоне элемента Гюйгенса отличается от структуры полей элементарных излучателей, на основе которых данный элемент образован. Так, если составляющие комбинированный излучатель элементы имеют в дальней зоне по одной отличной от нуля компоненте поля, т.е. одну компоненту характеристики направленности, то элемент Гюйгенса в дальней зоне имеют по две компоненты, отличные от нуля: θ - и φ - компоненты.

Во-вторых, нормированная характеристика направленности элемента Гюйгенса также отличается от соответствующей характеристики элементарных излучателей электрического и магнитного типов. Отличия заключаются в том, что характеристика направленности элемента Гюйгенса является векторной величиной:

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = \vec{\theta} F_{\theta}(\theta, \varphi) + \vec{\varphi} F_{\varphi}(\theta, \varphi). \quad (5.5)$$

Каждая из компонент характеристики направленности, записанных, например, относительно напряженности электрического поля, так называемые амплитудные характеристики направленности, зависит от двух углов и описывается соотношениями:

$$F_{\theta} = (1 + \cos \theta) \sin \varphi; F_{\varphi} = (1 + \cos \theta) \cos \varphi. \quad (5.6)$$

Характеристика направленности излучателя, записанная относительно мощности излучения, определяется выражением:

$$F(\theta, \varphi) = F_{\theta}^2(\theta, \varphi) + F_{\varphi}^2(\theta, \varphi) = (1 + \cos \theta)^2. \quad (5.7)$$

Как и для элементарных излучателей электрического и магнитного типов вектор Пойнтинга имеет только одну отличную от нуля компоненту Π_R :

$$\Pi_R = \Pi_R = \frac{1}{2} (E_{\theta} H_{\varphi}^* - E_{\varphi} H_{\theta}^*) = \frac{k^2 (E_m^S)^2 \Delta S^2}{32 \pi^2 W_0 r^2} (1 + \cos \theta)^2. \quad (5.8)$$

Анализ соотношений (5.4) и (5.8) показывает, что если амплитуда компонент электрического и магнитного полей элемента Гюйгенса убывают с увеличением расстояния как r^{-1} , что соответствует условию излучения Зоммерфельда, то плотность потока мощности электромагнитного поля обратно пропорциональна квадрату расстояния между элементом Гюйгенса и точкой наблюдения поля.

Графическое изображение характеристики направленности элемента Гюйгенса - диаграмма направленности - в произвольной плоскости $\varphi = \text{const}$ есть кардиоиды, показанная на рисунке 5.4.

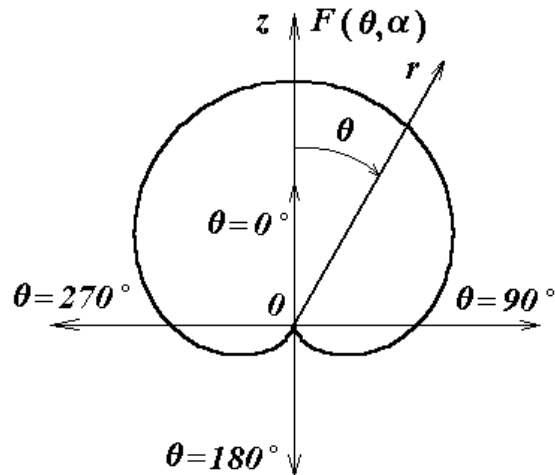


Рисунок 5.4 – Диаграмма направленности элемента Гюйгенса

5.3 Принцип получения остронаправленного излучения

Принципы получения остронаправленного излучения проиллюстрируем на примере излучения сторонних электрических и магнитных токов, распределенных на прямоугольной поверхности (рисунок 5.5).

Пусть на плоской прямоугольной поверхности размерами a и b заданы электрические и магнитные поля $\vec{E}_m^S = \vec{i}_x E_0$, $\vec{H}_m^S = \vec{i}_y \frac{E_0}{W}$. Достаточно малые элементы поверхности являются элементами Гюйгенса, рассмотренными выше. В связи с

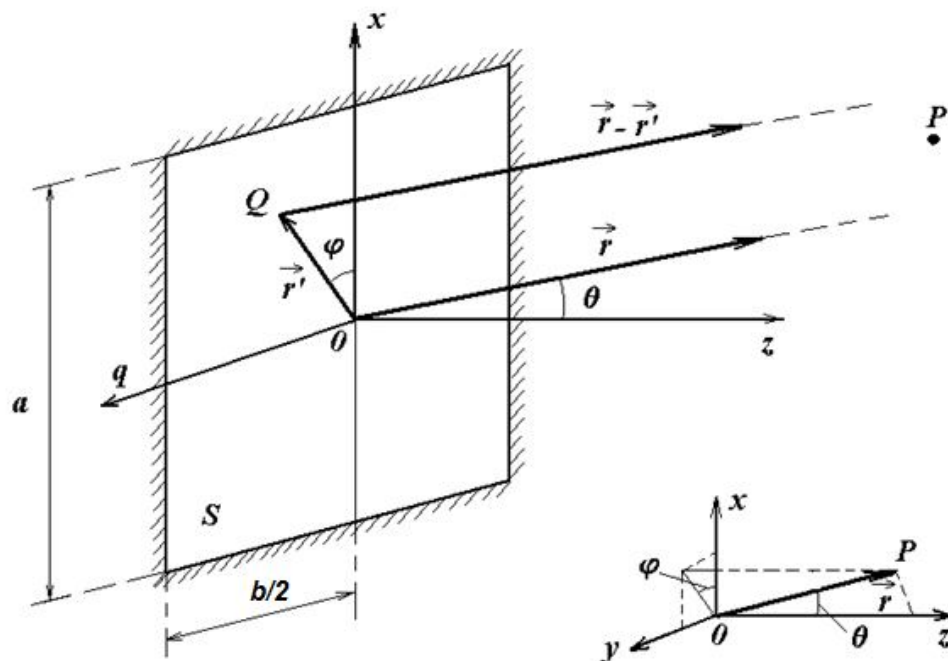


Рисунок 5.5 – Геометрия задачи об излучении из прямоугольного отверстия

Электродинамика и распространение радиоволн

этим для нахождения характеристик направленности такой поверхности можно воспользоваться уже полученными выражениями, описывающими поле излучения Гюйгенса (5.4), и провести интегрирование по поверхности S . При этом выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля имеет вид:

$$\vec{E}_m = \vec{i}_x \frac{ikE_0}{4\pi} \int_S (1 + \cos \theta') \left\{ \vec{\theta}_0 \cos \varphi' - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi' \right\} \frac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'. \quad (5.9)$$

В соотношении (5.9) $|\vec{r} - \vec{r}'|$ есть радиальная координата системы координат, связанной с элементом Гюйгенса: текущая точка интегрирования \vec{r}' в декартовой системе координат есть $(x', y', 0)$, а фиксированная точка наблюдения $\vec{r} = (x, y, z)$ - точка, в которой определяется поле.

При нахождении поля в дальней зоне отнесем точку наблюдения так далеко, чтобы векторы $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и \vec{r} можно было считать параллельными. Поскольку в дальней зоне все точки поверхности S имеют одинаковые угловые координаты $\theta' = \theta$ и φ' , множитель $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ можно заменить на $\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{r}$ (все это следует из параллельности векторов $|\vec{r} - \vec{r}'|$ и \vec{r}), под интегралом (5.9) остается только экспоненциальный множитель

$$\vec{E}_m = \vec{i}_x \frac{ikE_0}{4\pi} (1 + \cos \theta) \left\{ \vec{\theta}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi \right\} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|) dx' dy'. \quad (5.10)$$

Следует отметить, что, несмотря на то, что при нахождении амплитуды поля использовалась аппроксимация $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$, экспоненту под интегралом нельзя принять за $\exp(-ikr)$, так как размеры пластины a и b не малы по сравнению с длиной волны. В связи с этим разложим $|\vec{r} - \vec{r}'|$ в ряд, в котором отброшены члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \\ &= \sqrt{r^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2} = r - \frac{xx' + yy'}{r}. \end{aligned}$$

Внося этот ряд в показатель экспоненты интеграла (5.10), получаем

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(ik \frac{xx' + yy'}{r}) dx' dy' = \int_{-a/2}^{a/2} \exp(\frac{ikxx'}{2r}) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp(\frac{iky y'}{2r}) dy' =$$

$$= ab \frac{\sin\left(\frac{kax}{2r}\right)}{\frac{kax}{2r}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kby}{2r}\right)}{\frac{kby}{2r}}. \quad (5.11)$$

Окончательно выражение для поля в дальней зоне принимает вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_m = iE_0 ab \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \left\{ \vec{\theta}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi \right\} (1 + \cos \theta) \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{ka \sin \theta \cos \varphi}{2}\right)}{\frac{ka \sin \theta \cos \varphi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \theta \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{kb \sin \theta \sin \varphi}{2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Так же, как и для элементарных вибраторов, поле прямоугольного отверстия в дальней зоне представляет собой сферическую волну. Эта волна является локально плоской.

Из выражения (5.12) следует, что характеристика направленности $F(\theta, \varphi)$ определяется зависимостью

$$F(\theta, \varphi) = (1 + \cos \theta) \left| \frac{\sin u}{u} \right| \left| \frac{\sin v}{v} \right|, \quad (5.13)$$

где $u = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \varphi$, $v = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \varphi$. Первый множитель в (5.13), зависящий только от θ , есть не что иное, как характеристика направленности элемента Гюйгенса (5.7). Множитель вида $\left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)$ ($\xi=u, v$) отображает эффект наложения локальных волн, создаваемых всеми элементами Гюйгенса на поверхности S и называется **интерференционным множителем**. При $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$ соответствующий интерференционный множитель фактически и определяет характеристику направленности в области малых θ .

Проанализируем излучение прямоугольной пластины в зависимости от θ при $\varphi=0$ (E -плоскость – плоскость ориентации вектора \vec{E}) и $\varphi=\pi/2$ (H -плоскость – плоскость ориентации вектора \vec{H}). Характеристика направленности описывается соотношениями:

$$F^E(\theta) = (1 + \cos \theta) \left| \frac{\sin \xi^E}{\xi^E} \right|, \quad F^H(\theta) = (1 + \cos \theta) \left| \frac{\sin \xi^H}{\xi^H} \right|, \quad (5.14)$$

где $\xi^E = \frac{ka}{2} \sin \theta$ и $\xi^H = \frac{kb}{2} \sin \theta$.

На рисунке 5.6 показан график функции $F(\xi) = \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|$.

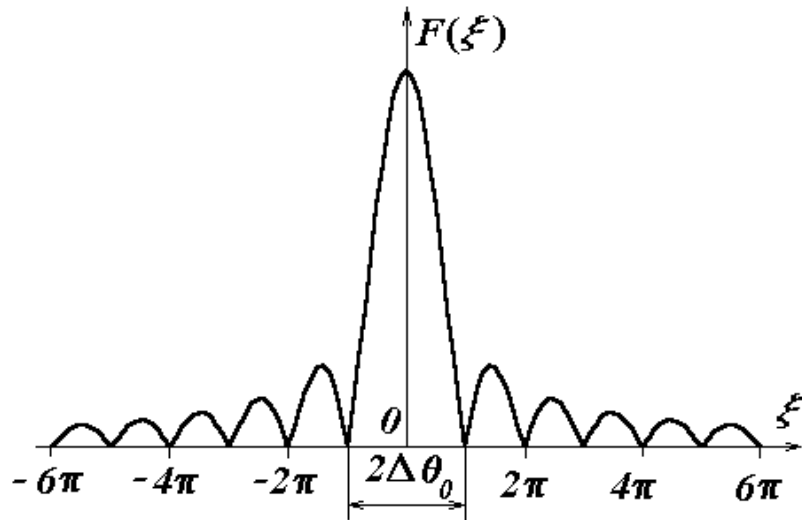


Рисунок 5.6 – График функции $F(\xi) = \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right|$

Как видно, при $\xi=0$ функция имеет главный максимум, соответствующий максимуму излучения при $\theta=0$, т.е. в направлении z . Поскольку в (5.14) при малых углах θ можно пренебречь влиянием множителя $(1 + \cos \theta)$, то об угловой ширине зоны наибольшего излучения можно судить по характеру интерференционного множителя.

Угловая ширина «луча» как зоны, ограниченной ближайшими к главному максимуму нулями, называется диаграммой направленности по нулевому уровню и определяется при выполнении условий:

$$2\Delta\theta_0^E \approx \frac{2\lambda}{a}, \quad 2\Delta\theta_0^H \approx \frac{2\lambda}{b}. \quad (5.15)$$

В таблице 5.1 приведены значения угловой ширины диаграммы направленности в главных сечениях для нескольких размеров прямоугольного отверстия. На рисунке 5.7,а приводятся диаграммы направленности в плоскости E для значений из указанной таблицы, а также объемные диаграммы направленности в обобщенной системе координат (рисунки 5.7,б,в). Темной плоскостью на указанных рисунках иллюстрируется плоскость E .

Таблица 5.1 – Зависимость между размером прямоугольного отверстия и полушириной главного лепестка ДН «по нулям»

Размер отверстия, a/λ	Полуширина ДН «по нулям» в плоскости E $\Delta\theta_0^E$, град	Номер кривой на графике 5.7,а
1,432	20	1
3,82	15	2
5,73	10	3

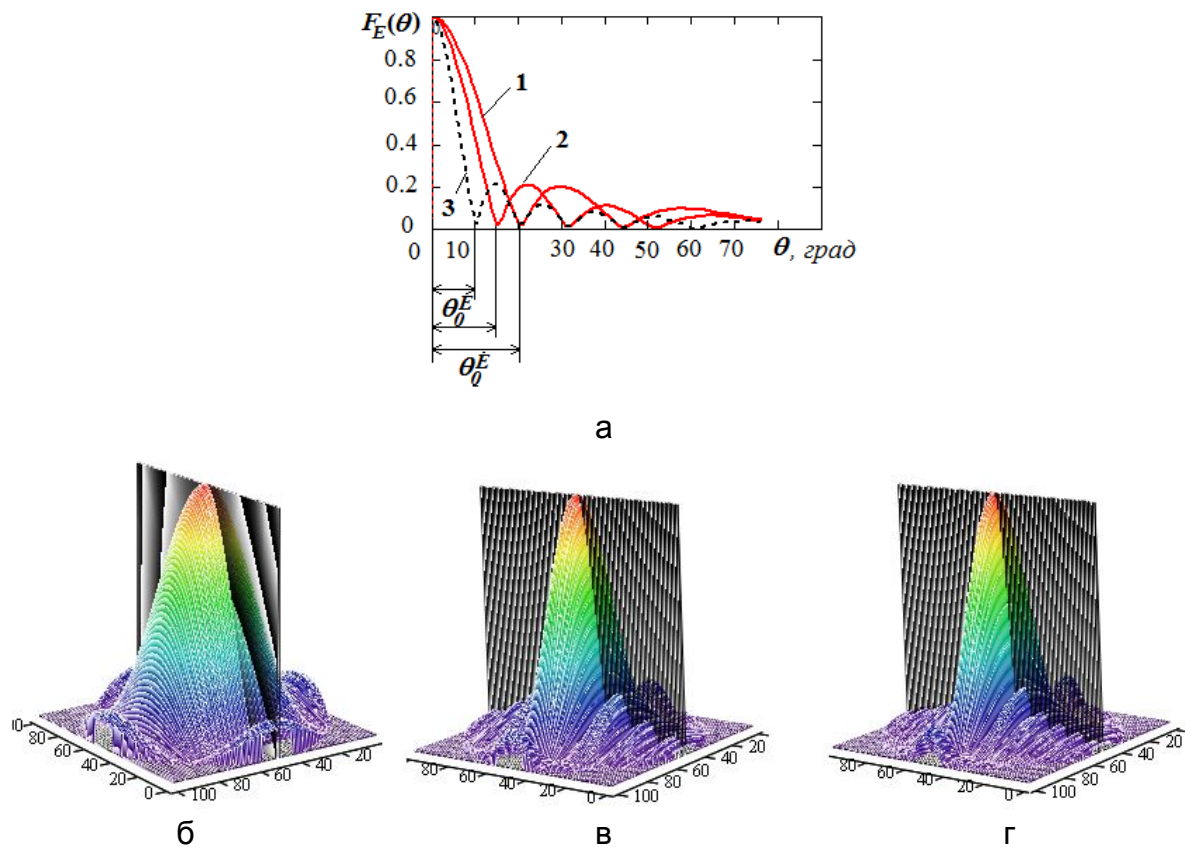


Рисунок 5.7 – Вид ДН в зависимости от размеров отверстия

Анализ приведенных результатов показывает, что чем больше размер отверстия в плоскости, тем уже в данном сечении получаемая диаграмма направленности. В связи с этим формулы (5.15) являются математической формулировкой нашего широкого применения в теории антенн **принципа получения остро-направленного излучения**:

- суперпозиция слабонаправленных источников;
- одинаковая ориентация источников;
- синфазность токов.

Тема 3. Плоские электромагнитные волны в неограниченных средах

Лекция N 6. Электромагнитные волны в различных средах

6.1 Классификация сред

Как уже отмечалось выше, распространение электромагнитных волн происходит в среде, параметры которой определяются диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями и удельной проводимостью σ среды. В зависимости от соотношения данных переменных проводят классификацию сред. В качестве критерия разделения используют:

- соотношение омических и диэлектрических потерь. Среда делится на диэлектрики, полупроводники и проводники;
- зависимость параметров среды от ориентации векторов и направления распространения волны - изотропные и анизотропные среды;
- зависимость параметров среды от уровня электромагнитного поля. Выделяют линейные и нелинейные среды.

Рассмотрим более подробно данную классификацию.

1. Разделение осуществляется по соотношению действительной и мнимой частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости, описываемой формулой:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha - i \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 (\varepsilon - i 60 \lambda_0 \sigma), \quad (6.1)$$

где λ_0 - длина волны в вакууме.

В зависимости от соотношения действительной (ε_α) и мнимой ($60 \lambda_0 \sigma$) частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости, описывающих соответствующий ток смещения и ток проводимости, имеем следующее деление сред:

- среда является диэлектриком, если $\varepsilon \gg 60 \lambda_0 \sigma$ (ток смещения превышает ток проводимости);
- среда является полупроводником, если $\varepsilon \approx 60 \lambda_0 \sigma$ (токи равны);
- среда является проводником, если $\varepsilon \ll 60 \lambda_0 \sigma$ (ток проводимости превышает ток смещения).

2. В соответствии со вторым критерием классификации сред идет разделение сред на изотропные и анизотропные. В изотропных средах вектор \vec{B} параллелен вектору \vec{H} , а вектор \vec{D} - вектору \vec{E} , абсолютная магнитная μ_α и диэлектрическая ε_α проницаемости сред являются скалярными величинами. В анизотропных средах магнитная и (или) диэлектрическая проницаемости сред являются

Электродинамика и распространение радиоволн

тензорными величинами, а вектора индукций не параллельны соответствующим векторам напряжённостей поля. Если тензором является магнитная проницаемость, то **анизотропию называют магнитной**. Если тензором является диэлектрическая проницаемость, то **анизотропию называют диэлектрической**. В частном случае, когда от нуля отличны только диагональные элементы и еще два первых элемента, среды называются **гиротропными**. Такой средой являются, например, ферриты и плазма. На рисунке 6.1 проиллюстрировано деление анизотропных сред, а на рисунке 6.2 показан частный случай анизотропных сред - гиротропные среды с диэлектрической (плазма) и магнитной (феррит) анизотропией.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{естественные} \\ \text{среды} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{- диэлектрическая} \\ \text{анизотропия} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{искусственные} \\ \text{среды} \end{array}$$

$$\underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- магнитная} \\ \text{анизотропия} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{искусственные} \\ \text{среды} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{бианизотропные} \\ \text{(киральные) среды} \end{array}$$

Рисунок 6.1 – Разделение анизотропных сред

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

плазма *феррит*

Рисунок 6.2 – Частный случай анизотропных сред – гиротропные среды

3. В соответствии с третьим признаком классификации среды делятся на **линейные** и **нелинейные**. Линейными называют среды, у которых ε, μ, σ не зависят от электромагнитного поля. В противном случае среды называются нелинейными.

Примером нелинейных сред является ионосфера, подвижность электронов которой зависит от напряженности электромагнитного поля. Более подробно этот пример будет рассмотрен в конце курса лекций.

6.2 Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь

При рассмотрении электромагнитных полей, создаваемых элементарными вибраторами, было выяснено, что порождаемые ими волны являются сферическими, т.е. их поверхности равных фаз представляют собой концентрические сферы с центром в середине вибратора. Было отмечено, что в дальней зоне волна представляет собой локально плоскую (т.е. не имеет радиальной составляющей).

Электродинамика и распространение радиоволн

Для упрощения решения многих практически важных задач вводят понятие плоской волны. **Плоской волной** называют волну, фронт которой имеет бесконечную протяжённость, причём амплитуды и фазы векторов поля во всех точках фронта одинаковы. **Волна** называется **однородной**, если ее амплитуда постоянна во всех точках фазового фронта, и **неоднородной**, если ее амплитуда зависит от координат точек фазового фронта. (**Фазовым фронтом** волны называется поверхность, проходящую через точки с одинаковыми фазами).

Иллюстрация плоских волн показана на рисунке 6.3. При этом рисунок 6.3,а иллюстрирует перемещение плоского фронта во времени, а рисунок 6.3,б – в пространстве.

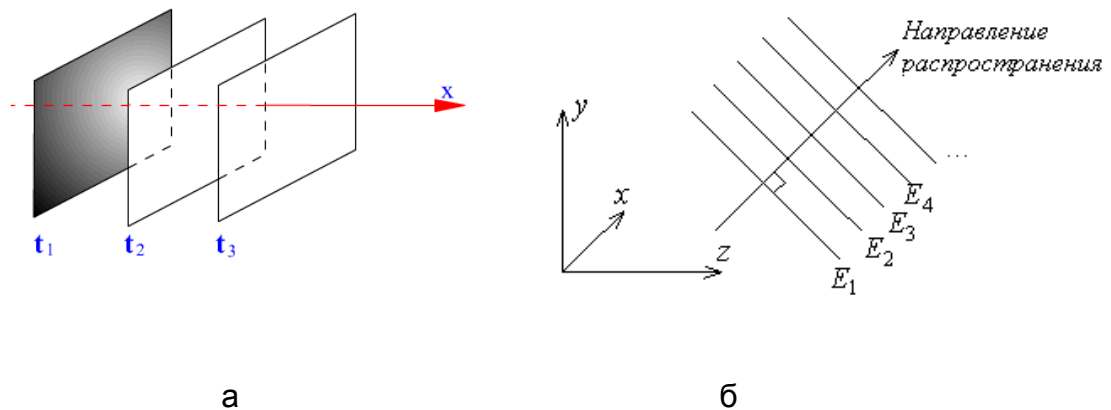


Рисунок 6.3 – Иллюстрация плоских волн

Плоских волн в природе не существует, т.к. потребовался бы бесконечно протяжённый источник. Однако на большом удалении от источника волна может считаться локально плоской.

Любая волна характеризуется такими величинами как фазовая скорость, длина волны и направление распространения.

Фазовая скорость распространения плоской волны, т.е. скорость движения фазового фронта, в однородной среде без потерь определяется соотношением:

$$\vec{v}_\phi = \vec{i}_z \frac{\omega}{k_\beta} = \vec{i}_z \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \vec{v}_0. \quad (6.2)$$

Данная скорость, находящаяся из уравнения движения любой точки на фазовом фронте, фаза которого неизменна.

Длина волны, т.е. расстояние между двумя фазовыми фронтами волны, различающимися на 2π , определяется формулой:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{|\vec{v}_0|}{f}. \quad (6.3)$$

Назовем перпендикуляр к фронту волны **лучом**. Его направление обозначим ортом $\vec{i}_\perp = \vec{i}_z$, т.е. оно совпадает с направлением фазовой скорости \vec{v}_ϕ . Введем **волновой вектор** \vec{k} :

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\vec{k} = i_{\perp} \vec{k} = i_{\perp} (k_{\beta} - ik_{\alpha}), \quad (6.4)$$

совпадающий с направлением луча и равный по величине коэффициенту распространения волны в данной среде. В соотношении (6.4) k_{β} - коэффициент фазы; k_{α} - коэффициент затухания.

Перейдем теперь к рассмотрению характеристик плоской однородной волны в среде без потерь на примере идеального диэлектрика ($\mu_a = \mu_0$), полагая, что плоская волна распространяется вдоль оси z . При таком допущении и отсутствии источников сторонних токов уравнения Максвелла могут быть сведены к двум независимым системам дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i\omega\epsilon_a E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -i\mu_a H_y \end{aligned} \right\}, \quad (6.5a) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z} &= i\omega\epsilon_a E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu_a H_x \end{aligned} \right\}, \quad (6.5b)$$

каждая из которых описывает соответствующую плоскую волну: (E_x, H_y) либо (E_y, H_x) . Причем данные системы описывают взаимно независимые поля, в каждом из которых векторы поля \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны.

Дальнейшие рассуждения будем проводить для системы (6.5a). Решение будем осуществлять путем сведения системы к однородному уравнению Гельмгольца относительно комплексной амплитуды вектора \dot{H}_y :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y = 0. \quad (6.6)$$

Поскольку для диэлектриков $\mu = 1$, то волновое число, входящее в данное соотношение, может быть переписано в виде:

$$k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = \omega\sqrt{\epsilon_0\epsilon\mu_0\mu} = k_0\sqrt{\epsilon\mu} = k_0\sqrt{\epsilon}, \quad (6.7)$$

где $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ волновое число в вакууме.

Подставляя выражение (6.7) в определения длины волны (6.3) и фазовой скорости (6.2), можно сделать вывод, что в диэлектрике без потерь длина волны и фазовая скорость уменьшаются в $\sqrt{\epsilon}$ раз по сравнению с аналогичными параметрами для вакуума.

Несложно убедиться, что частным решением уравнения (6.6) является

$$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-ikz]. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8) описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z .

Электродинамика и распространение радиоволн

Найдём соотношение между поперечными компонентами E_x и H_y в плоской волне. Из первого уравнения (6.5а) имеем

$$E_x(z) = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}{\omega\varepsilon_a} \dot{H}_y(z) = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a} \cdot \dot{H}_y(z). \quad (6.9)$$

Величина $\sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ имеет размерность сопротивления и называется **волновым (характеристическим) сопротивлением среды**. Оно характеризует отношение ортогональных составляющих напряжённостей электрического и магнитного поля. Для идеального диэлектрика волновое сопротивление среды чисто вещественно и определяется соотношением:

$$W = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ [Ом]}. \quad (6.10)$$

Вещественный характер Z_c означает, что вектора \vec{E} и \vec{H} имеют одинаковую фазу. Вектор Пойнтинга, характеризующий направление распространения волны и величину плотности потока мощности, является вещественным

$$\vec{P} = 0.5 \cdot [\vec{i}_x \cdot \dot{E}_x, \vec{i}_y \cdot \dot{H}_y^*] = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{Z_c}. \quad (6.11)$$

Здесь $E_x = 0.707 \cdot |\dot{E}_x|$ - действующее значение.

Таким образом, имеется только активный поток энергии в направлении оси Oz . Плотность потока энергии не зависит от координат и от частоты. Скорость распространения энергии равна фазовой скорости.

Из простых физических соображений очевидно, что плоскую волну можно создать только в ограниченной части пространства.

6.3 Плоские волны в средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн

Для реальных сред воздействие электромагнитного поля вызывает два вида потерь в среде. **Потери первого вида** обусловлены **проводимостью** материала. Данные потери характерны для металлов и хороших проводников, а также для диэлектриков на низких частотах и в стационарных полях. **Потери второго вида** представляют собой **поляризационные** (диэлектрические или магнитные) потери, объясняемые трением при смещении заряженных частиц вещества в переменном электрическом поле или в магнитных материалах при перемагничивании. В результате наблюдается явление линейного диэлектрического (соответственно магнитного) гистерезиса, отставание по фазе векторов электрического \vec{D} (соответственно магнитного \vec{B}) смещения от вектора напряжённости электрического \vec{E} (магнитного \vec{H}) поля. Отставанию по фазе соответствует комплексная (ди-

Электродинамика и распространение радиоволн

электрическая или магнитная) проницаемость с отрицательной мнимой частью в материальных уравнениях. Данные проницаемости, напомним, могут быть представлены в виде:

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - i\varepsilon''_a = \varepsilon'_a (1 - i \operatorname{tg} \delta^\varepsilon), \quad \tilde{\mu}_a = \mu'_a - i\mu''_a = \mu'_a (1 - i \operatorname{tg} \delta^\mu), \quad (6.12)$$

в которых, напомним, $\operatorname{tg} \delta^\varepsilon = \frac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a}$, $\operatorname{tg} \delta^\mu = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}$ - соответственно тангенс

угла диэлектрических и магнитных потерь.

Рассмотрим более подробно потери, обусловленные проводимостью среды. В этом случае волновое число в диэлектрике с потерями будет комплексной величиной:

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a} = k_0 \cdot \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = k_0 \cdot \sqrt{\varepsilon - i60\lambda_0\sigma}. \quad (6.13)$$

Представляя комплексный коэффициент распространения (6.13) через коэффициенты затухания и фазы, решение уравнения Максвелла принимает вид

$$\dot{H}(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-\alpha z] \exp[-i\gamma z]. \quad (6.14)$$

Первый экспоненциальный сомножитель описывает поглощение энергии в среде за счет электрических и магнитных потерь, т.е. затухание волны. Второй экспоненциальный сомножитель указывает на волновой характер поля, на его движение.

Для реальных диэлектриков, у которых магнитные потери отсутствуют, а тангенс угла диэлектрических потерь хотя и мал, но имеет конечную величину, выражения для составляющих комплексного коэффициента распространения могут быть записаны в виде:

$$k_\beta = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad k_\alpha = \frac{k}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega}{2} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta. \quad (6.15)$$

Фазовая скорость в диэлектрике определяется формулой:

$$v_\phi = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k_\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (6.16)$$

Конечная величина тангенса диэлектрических потерь обуславливает сдвиг фаз между векторами \vec{E} и \vec{H} , и, соответственно комплексный характер как волнового сопротивления

$$W = Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \exp(i \frac{\delta}{2}), \quad (6.17)$$

так и вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{2|Z_c|} \exp(-2\alpha z) \exp\left(i \frac{\delta}{2}\right). \quad (6.18)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Появление реактивной составляющей описывает тепловые потери в среде. Средняя плотность потока энергии, описываемая соотношением

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \text{Re}(\vec{\Pi}) = \vec{i}_z \frac{E_x^2}{2|Z_c|} \exp(-2\alpha z) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad (6.19)$$

экспоненциально убывает вдоль оси Oz со скоростью

$$\vec{v}_3 = \frac{\text{Re}(\vec{\Pi})}{w_{\text{cp}}}, \quad (6.20)$$

где w_{cp} - средняя объемная плотность энергии. Модуль волнового сопротивления $|Z_c|$ описывается выражением

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (6.21)$$

Из изложенного выше следует, что свойства плоской волны, распространяющейся в среде с проводимостью и без потерь, различны. Основное отличие состоит в том, что в среде без потерь параметры плоской волны одинаковы при любых частотах, а в среде с конечной проводимостью они зависят от частоты. Зависимость свойств волны от частоты называется **дисперсией**, а соответствующие **среды – диспергирующими**.

Для хороших проводников $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i\sigma/\omega \approx -i\sigma/\omega$ и магнитные потери отсутствуют, т.е. $\tilde{\mu}_a = \mu_a$. Коэффициент распространения волны будет определяться соотношением

$$\tilde{k} = i\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\tilde{\mu}_a} = i\omega\sqrt{-i\frac{\sigma}{\omega}\mu_a} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_a\sigma}. \quad (6.22)$$

Введем величину

$$d_0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_a\omega}} \quad (6.23)$$

и назовем ее **толщиной скин-слоя** (глубиной поверхностного проникновения, толщиной поверхностного слоя).

Коэффициент распространения и его составляющие, а также выражение для фазовой скорости с учетом формулы (6.23) могут быть записаны в виде

$$\tilde{k} = \frac{1+i}{d_0}, \quad k_\alpha = \frac{1}{d_0}, \quad k_\beta = \frac{1}{d_0}, \quad v_\phi = \omega d_0. \quad (6.24)$$

6.4 Поляризация плоских волн

Выше мы рассмотрели плоскую волну E_x, H_y , определенную системой (6.5а). Всё сказанное в полной мере относится и к плоской волне E_y, H_x , описываемой системой (6.5б). В каждой из этих волн вектор \vec{E} , изменяясь по гармоническому закону, всё время остаётся коллинеарным самому себе. **Волну**, вектор \vec{E} которой в процессе распространения лежит в неподвижной плоскости, называют **линейно поляризованной**, а плоскость, проходящую через направление распространения электромагнитной волны и вектор \vec{E} - **плоскостью поляризации**.

Источниками линейно поляризованной волны являются, например, либо электрический либо магнитный вибраторы.

Если вектор \vec{E} будет иметь две составляющие E_x и E_y , возбуждаемые, например, двумя взаимно перпендикулярными элементарными электрическим вибраторами, то сдвиг фаз между ними будет определяться фазовыми соотношениями токов, питающих вибраторы. В общем случае выражение для вектора \vec{E} для локально плоской волны в дальней зоне будет определяться выражением

$$\vec{E} = \vec{i}_x E_x \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{i}_y E_y \cos(\omega t - kz + \varphi_2), \quad (6.25)$$

в котором φ_1, φ_2 - начальные фазы составляющих E_x и E_y в точке $z = 0$ в начальный момент времени ($t = 0$).

В зависимости от соотношения амплитуд и фаз линейных составляющих волны различаются поляризацией. Так, если амплитуды составляющих вектора \vec{E} равны между собой, а начальные фазы отличаются друг от друга на величину $\pm \pi / 2$, то волна такого типа называется **волной с круговой поляризацией**. При этом вектор \vec{E} , оставаясь неизменным по величине, вращается вокруг оси Oz с угловой частотой ω . В случае, если вращение осуществляется по часовой стрелке (при удалении волны от наблюдателя), то говорят, что волна имеет **правую круговую поляризацию**, в противном случае – **левую круговую поляризацию**.

Следует отметить, что всякую линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн круговой поляризацией с правым и левым направлением вращения одинаковой круговой частоты.

При произвольном соотношении амплитуд и начальных фаз конец вектора \vec{E} в фиксированной точке пространства описывает эллипс. **Волны** такого типа называются **эллиптически поляризованными**. Данные волны описываются параметрами поляризационного эллипса (см. рисунок 6.4):

- **коэффициентом эллиптичности** (коэффициентом равномерности поляризационного эллипса), равным отношению малой и большой полуосей эллипса

$$k_e = \frac{b}{a}, \quad (6.26)$$

- **углом β_x (или β_y) наклона поляризационного эллипса** к соответствующей оси;
- **направлением вращения вектора \vec{E} .**

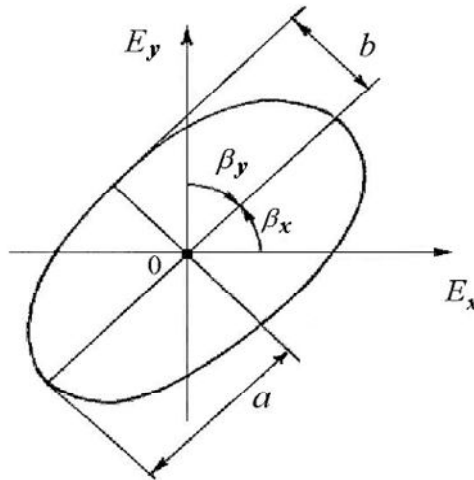


Рисунок 6.4 – Поляризационный эллипс

Понятие линейной, круговой и эллиптической поляризации применимо не только для плоских волн. Например, сферические волны, создаваемые элементарным электрическим вибратором в дальней зоне, линейно поляризованы. Волны, создаваемые сложными излучателями, могут иметь круговую или эллиптическую поляризацию. В общем случае монохроматические волны всегда поляризованы.

Лекция №7. Распространение плоских волн в гиротропных средах

7.1 Плоские однородные волны в ферритах при наличии подмагничивания. Резонансное поглощение

Свойства анизотропных сред, как известно, зависят от направления распространения электромагнитной волны. Анизотропия в природе может быть либо магнитной, либо диэлектрической. Вещества, одновременно обладающие магнитной и диэлектрической анизотропией, получили название **бианизотропных** и созданы в конце 20 века искусственным путем включения в ферриты определенным образом ориентированных спиралек.

Особенности распространения волн будем проводить на примере ферритов и плазмы, обладающих соответственно магнитной и диэлектрической анизотропией.

Ферриты, относящиеся к классу ферромагнетиков, представляют собой соединения оксида железа с оксидами других металлов и обладают высоким большим (до $10^7 \dots 10^8$ Ом•м) электрическим сопротивлением. Электродинамические свойства ферритов зависят от частоты, но изменяются в различных пределах. В

Электродинамика и распространение радиоволн

диапазоне СВЧ на сантиметровых волнах величина относительной магнитной проницаемости приближенно равна единице. Рабочий диапазон частот ферритов - от 20МГц до 150ГГц. Для работы на разных частотах используются различные материалы.

В ненамагниченном состоянии ферриты представляют собой обычный диэлектрик, в котором магнитные моменты конгломерата областей ориентированы в различных направлениях. Механический и магнитный моменты, создаваемые вращением электрона вокруг своей оси соответственно под действием своей массы и действием заряда, направлены вдоль оси вращения в разные стороны. После приложения постоянного магнитного поля $\vec{H} =$ ось вращения электрона ориентируется по направлению этого поля. Если ось вращения отклонить, она не сразу вернется в исходное положение, а будет совершать так называемую прецессию вокруг исходного положения, напоминая качание оси волчка при ее отклонении от вертикали. Круговая частота прецессии зависит от величины постоянного магнитного поля и **гиромагнитного отношения** $\gamma = -2.21 \cdot 10^5$ Гц/(А•м), связывающего заряд и массу электрона:

$$\omega_m = |\gamma| H, \quad (7.1)$$

Данная частота получила название частоты **гиромагнитного резонанса или частоты прецессии** и соответствует угловой скорости вращения электрона.

Если на феррит помимо постоянного поля воздействует высокочастотное магнитное поле гармонической волны

$$\vec{H} = H_0 \exp(i\omega t), \quad (7.2)$$

имеющее в общем случае круговую поляризацию, то ось вращения электрона будет отклоняться, если переменное магнитное поле будет действовать перпендикулярно данной оси. Под действием переменного магнитного поля будут происходить вынужденные колебания спинов электронов, а амплитуда этих колебаний будет тем большей, чем ближе частота ω к круговой частоте прецессии ω_m . При совпадении частот ω и ω_m наступает явление **ферромагнитного резонанса**, играющее важную роль в применении ферритов. При этом вращающийся вектор переменного магнитного поля остается неподвижным относительно прецессирующего магнитного момента. Энергия, подводимая от высокочастотного магнитного поля, рассеивается в виде тепла в кристаллической решетке феррита, т.е. поглощается. Система проявляет себя подобно резонансному контуру в теории цепей.

Математически указанные физические явления находят свое отражение в тензорном характере магнитной проницаемости намагниченного феррита:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_x & -ia & 0 \\ ia & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\mu_x = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2} \right), \quad a = \mu_0 \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2}, \quad (7.4a) \quad (7.4b)$$

где

Случай $\omega_m = \pm \omega$ в соотношениях (7.4), т.е. совпадение частот вращения, соответствует явлению ферромагнитного резонанса. Входящая в указанные соотношения частота ω_0 связана с магнитной восприимчивостью среды χ^m : т.е. откликом среды на прикладываемое внешнее магнитное поле:

$$\omega_0 = |\gamma| \mu_0 \chi^m H_{\pm} = |\gamma| \mu_0 (\mu - 1) H_{\pm}. \quad (7.5)$$

В таблицу 7.1 сведены условия резонансов, которые могут наблюдаться в гиромагнитных средах.

Таблица 7.1 – Условия возникновения различных резонансов в гиромагнитных средах

Без подмагничивания	При воздействии поля подмагничивания \vec{H}_{\pm}	При воздействии поля подмагничивания \vec{H}_{\pm} и высокочастотного магнитного поля $\vec{H}_{\sim} = \vec{H}_{\pm}$
Обычный диэлектрик	Гиромагнитный резонанс на частоте ω_m . Условие возникновения: частота поля подмагничивания ω_m совпадает с угловой частотой вращения электрона	Ферромагнитный резонанс. Условие возникновения: Частота высокочастотного поля ω совпадает с частотой поля подмагничивания ω_m и угловой частотой вращения электрона. <i>Энергия, подводимая от высокочастотного магнитного поля, рассеивается в виде тепла в кристаллической решетке феррита, т.е. поглощается. Система как резонансный контур в теории цепей.</i>

7.2 Особенности распространения электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите

Влияние направление распространения волны относительно направления поля подмагничивания на структуру волны в феррите рассмотрим на примере двух предельных случаев – распространения волны вдоль определенной оси (вдоль постоянного магнитного поля) и перпендикулярно ей. Все остальные возможные комбинации можно получить, используя принцип суперпозиции.

Начнем со случая, когда высокочастотное переменное магнитное поле линейной поляризации является продольным. Предположим, что

$$\vec{H}_{\sim} = \vec{i}_z H_{\sim}. \quad (7.6)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

В этом случае $\partial/\partial x = \partial/\partial y \equiv 0$, $E_z = 0$, $H_z = 0$, и отличные от нуля уравнения Максвелла образуют систему:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_y, \quad (7.7a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega(\mu_x H_x - iaH_y), \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega(\mu_x H_y + iaH_x). \quad (7.7b)$$

На основе решения системы уравнений (7.7) получаются выражения, описывающие коэффициенты распространения волн (волновые числа) и волновые сопротивления соответственно:

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu_x \pm a)}. \quad (7.8) \quad Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_x \pm a}{\varepsilon}}. \quad (7.9)$$

Первое волновое число (с плюсом, индекс 1) соответствует волне круговой поляризации с левым направлением вращения, второе волновое число (слагаемое с минусом, индекс 2) – волне с правым направлением вращения, т.е. волна линейной поляризации представляется в виде суперпозиции двух волн круговой поляризации. Причем, если в среде существуют обе волны круговой поляризации с равными амплитудами, то компоненты суммарного электромагнитного поля обладают следующими свойствами:

- компоненты напряженности магнитного поля колеблются в фазе, что соответствует линейной поляризации поля (суммарная компонента магнитного поля имеет ту же поляризацию, что и исходная волна);
- электрическое поле суммарной волны будет эллиптически поляризованным, поскольку $Z_1 \neq Z_2$, а, следовательно, амплитуды волн левого и правого направлений вращения различны (суммарная компонента электрического поля изменяет поляризацию с линейной на эллиптическую).

Угол наклона вектора \vec{H} и оси поляризационного эллипса электрического поля определяется формулой:

$$\theta = \arctg\left(\frac{H_y}{H_x}\right) = \theta' z, \quad (7.9)$$

где $\theta' = \frac{k_1 - k_2}{2}$ - постоянная Фарадея, характеризующая угол поворота поля-

ризационного эллипса на единицу длины пути.

Явление поворота поляризационного эллипса в зависимости от пройденного волной расстояния получило название эффекта Фарадея, а среды, в которых происходит данный эффект, получили название гиротропных, т.е. вращающихся.

Направление вращения плоскости поляризации зависит от соотношения величины постоянного магнитного поля и величины поля, соответствующего резонансу $H_{рез}$, определяем по аналогии с выражением (7.1):

$$H_{\text{рез}} = \frac{\omega}{|\gamma|}. \quad (7.10)$$

Различие коэффициентов распространения волн с левым и правым направлением вращения приводит к тому, что различаются и связанные с ними фазовые скорости:

$$v_{\phi 1,2} = \frac{\omega}{k_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_{1,2}}}. \quad (7.11)$$

в которых магнитные проницаемости волн с левым и правым направлением вращения описываются формулами:

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_m \pm \omega} \right). \quad (7.12)$$

Анализ соотношений (7.11) и (7.12) показывает:

- при совпадении направлений распространения волны и поля подмагничивания резонансное поглощение при ферромагнитном резонансе испытывает волна правого направления вращения (ее фазовая обращается в нуль). Если изменить направление постоянного поля на противоположное, то изменится знак у коэффициента a , и резонансное поглощение будет испытывать волна левого направления вращения;

- изменением величины ω_0 , т.е. постоянного магнитного поля, можно осуществлять управление требуемым образом параметрами феррита.

Следующая особенность - намагниченный феррит является невзаимной средой: из положения A (см. рисунок 7.1) вектор при движении волны в прямом направлении поворачивается в положение B , а при обратном – не возвращается в A , а, продолжая вращаться в ту же сторону, приходит в положение C . Таким образом, **поле в гиротропной среде не подчиняется принципу взаимности.**

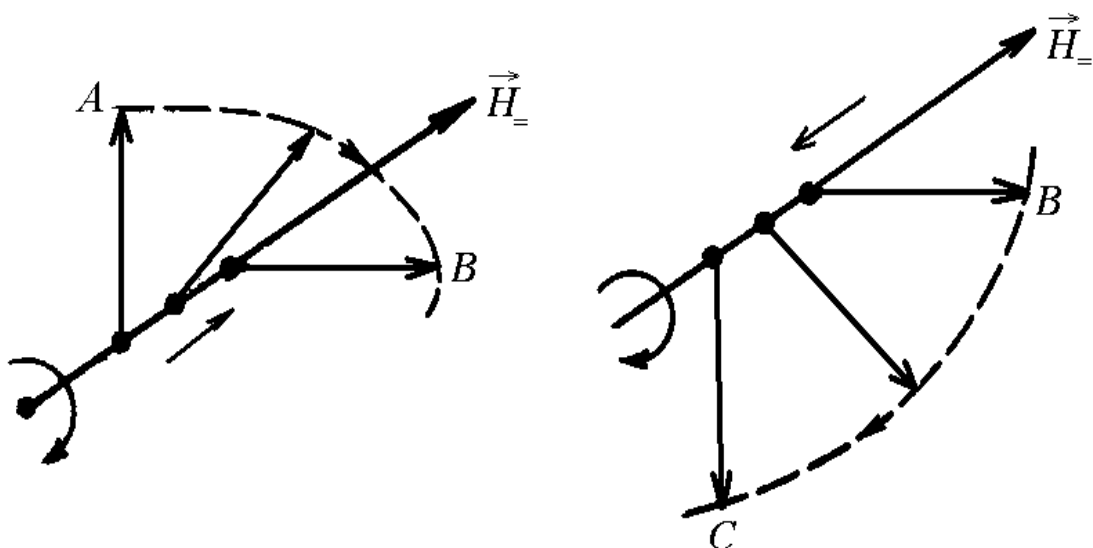


Рисунок 7.1 – Иллюстрация свойства невзаимности гиротропной среды

Электродинамика и распространение радиоволн

В намагниченных ферритах, имеющих конечные размеры в поперечном сечении, наблюдается **эффект смещения поля**. Данный эффект возникает при отрицательных значениях μ_2 (нижний знак в формуле (7.12)), когда коэффициент распространения k_2 волны с правым направлением вращения, как несложно заметить из выражения (7.8), становится чисто мнимой величиной. Это соответствует волнам с экспоненциально убывающей вдоль оси Oz амплитудой, уменьшающейся не из-за тепловых потерь в среде, а вследствие эффекта отражения, вытеснения поля средой. При этом распространение волн с правым направлением вращения в феррите становится невозможным. При конечных в поперечном сечении размерах феррита волна данной поляризации вытесняется и распространяется вне ферритовой среды. Волны с левым направлением вращения при этом распространяются в ферритовой среде нормально.

7.3 Особенности распространения электромагнитных волн в поперечно намагниченном феррите

Как в ранее рассмотренном случае скалярная система уравнений Максвелла также распадается на две группы независимых уравнений, каждая из которых описывает отдельную волну:

$$\begin{cases} E_{0x} = 0, \\ kH_{0z} = \omega \varepsilon E_{0y}, \\ kH_{0y} = -\omega \varepsilon E_{0z}, \end{cases} \quad (7.13a) \quad \begin{cases} \mu_x H_{0x} = iaH_{0y}, \\ -kE_{0z} = \omega (iaH_{0x} + \mu_x H_{0y}), \\ kE_{0y} = \omega \mu H_{0z}. \end{cases} \quad (7.13b)$$

Система (7.13a) описывает волну, ничем не отличающуюся от обычной плоской волны в изотропной среде с параметрами ε , μ_0 (**обыкновенная волна**), имеющую магнитную составляющую, параллельную $\vec{H}_=$.

Вторая система уравнений описывает волну, которая, в отличие от обыкновенной, имеет продольную составляющую магнитного поля (**необыкновенная волна**). Из первого уравнения системы (7.13b) следует, что магнитное поле поляризовано эллиптически в плоскости xOy , перпендикулярной $\vec{H}_=$. В этом явлении проявляются гиротропные свойства феррита.

Поскольку относительная магнитная проницаемость необыкновенной волны μ_{\perp} , определяемая соотношением

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}, \quad (7.14)$$

отличается от соответствующего параметра обыкновенной волны, то данные волны будут иметь и различные фазовые скорости, причем фазовая скорость необыкновенной волны будет зависеть от напряженности постоянного магнитного поля. При $\mu_x = 0$ $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$ $v_{\text{необ}} = 0$, т.е. необыкновенная волна распространяться не будет. В этом случае наблюдается **поперечный гиромангнитный резонанс**.

Электродинамика и распространение радиоволн

На рисунке 7.2 показаны зависимости свойств среды для волн с правым (кривая 1) и левым (кривая 2) направлением вращения (при параллельном подмагничивании) и необыкновенной (кривая 3) и обыкновенной (кривая 4) волн (при поперечном подмагничивании).

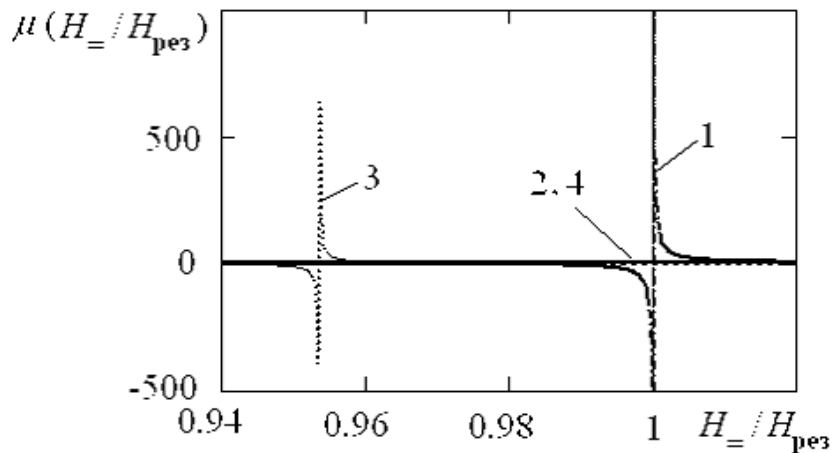


Рисунок 7.2 – Иллюстрация влияния ориентации поля подмагничивания и его интенсивности на величину магнитной проницаемости феррита

Помимо поперечного резонанса при распространении волны в поперечном полю подмагничивания направлении наблюдается эффект зависимости поляризации волны от пройденного волной расстояния, обусловленный неравенством фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной волн, т.е. сдвига фаз между ними:

$$\psi = (k_{необ} - k_{об})x. \quad (7.15)$$

При распространении волны поляризация суммарной волны электрического поля будет либо линейной, если фазовый сдвиг равен целому числу π , т.е. $\psi = n\pi$, либо эллиптической (во всех остальных случаях). Частный случай эллиптической поляризации – круговая поляризация – возможен при равенстве амплитуд $E_{0z} = E_{0y}$ (когда в точке $x = 0$ вектор напряженности электрического поля исходной волны направлен под углом 45° по отношению к оси Oy) в точках, где $\psi = (2n + 1)\pi / 2$.

Лекция №8. Волновые явления вблизи границы раздела сред

8.1. Нормальное падение плоских волн на границу раздела сред

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\epsilon}_a$, $\tilde{\mu}_a$, σ и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны, как показано на рисунке 8.1.

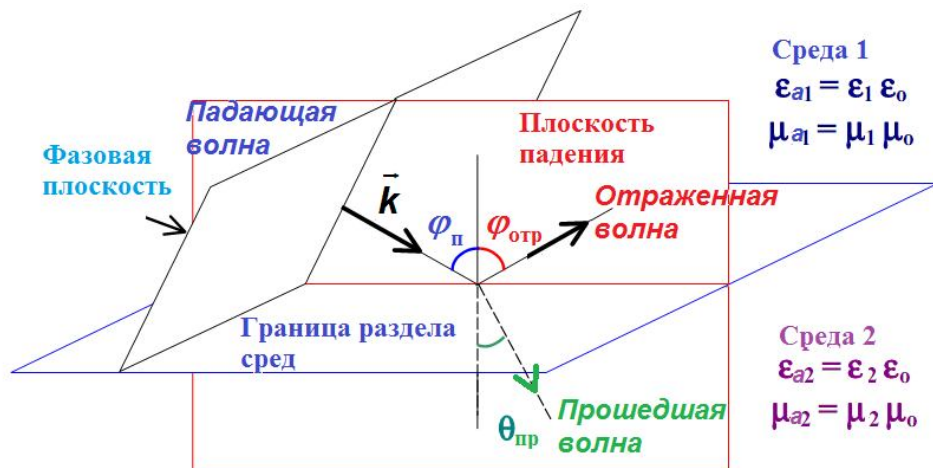


Рисунок 8.1 – Геометрия задачи о нахождении полей при падении волны на границу раздела сред

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны **коэффициентами отражения и преломления**:

$$\dot{R}_E = \dot{E}_{отр} / \dot{E}_{пад}, \quad \dot{T}_E = \dot{E}_{пр} / \dot{E}_{пад}. \quad (8.1)$$

Коэффициенты отражения и преломления обобщенно называются **коэффициентами Френеля** и находятся на основании граничных условий на плоскостях, разделяющих среды с различными значениями электродинамических параметров. При рассмотрении материалов лекции будем представлять волны в виде лучей. Это допустимо, поскольку плоскую границу можно считать бесконечно протяженной.

Для математической формулировки данных коэффициентов введем несколько понятий.

Плоскостью падения называют плоскость, в которой лежат направление распространения падающей волны и нормаль к поверхности раздела сред в точке падения.

В зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля в волне относительно границы раздела сред линейно поляризованные плоские волны условно делятся на вертикально- и горизонтально-поляризованные. Волну называют **вертикально-поляризованной** (поляризованной в плоскости падения, параллельно поляризованная волна), если вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения (рисунок 8.1,а). Если же вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения и, следовательно, параллелен границе раздела, то волна называется **горизонтально-поляризованной** (или поляризованной нормально к плоскости падения, волна перпендикулярной поляризации) (рисунок 8.1,б).

Направления распространения падающей, отраженной и прошедшей волн, отсчитываемые от нормали к поверхности раздела, связаны между собой законами Снеллиуса (Снелля):

угол падения равен углу отражения (1-й закон Снеллиуса):

синусы углов падения и преломления относятся как постоянные распространения в соответствующих средах (2-й закон Снеллиуса):

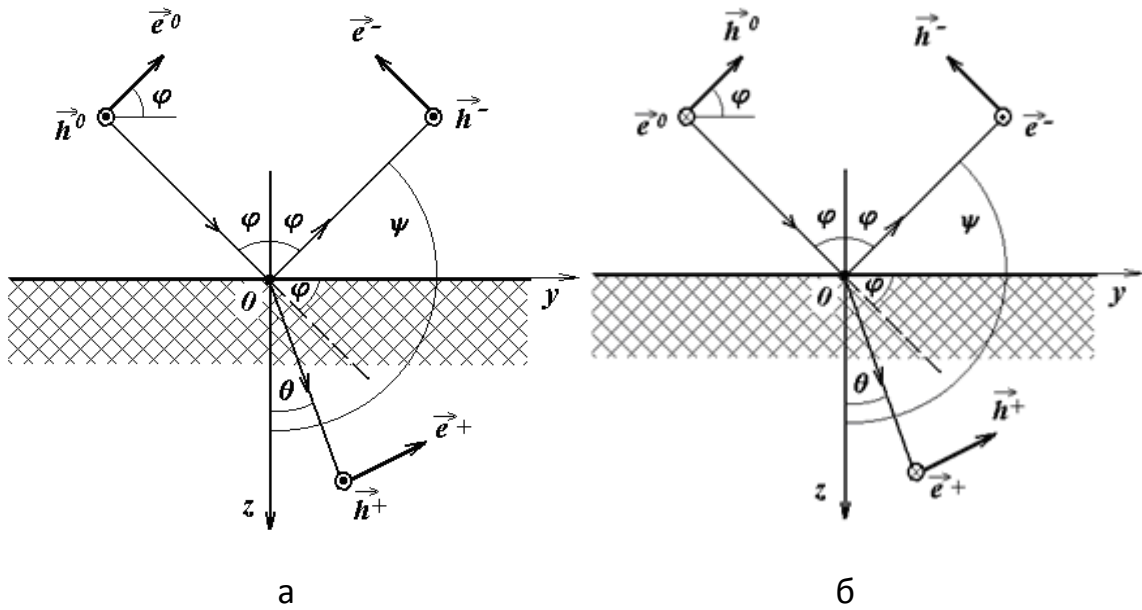


Рисунок 8.1 – Ориентация векторов в зависимости от поляризации волны

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (8.2)$$

Для непоглощающих сред закон синусов записывается в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{v_{\phi 1}}{v_{\phi 2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}}{\sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \quad (8.3)$$

где n_{12} - относительный коэффициент преломления (в оптике данный параметр определяется экспериментально). Из закона синусов следует, что отношение синусов углов падения и преломления равно постоянной величине, зависящей только от параметров граничащих сред.

С точки зрения электродинамики законы Снеллиуса – следствия уравнений Максвелла и связывают между собой фазовые скорости распространения волн в средах на границе раздела.

Для нахождения соотношения между амплитудами векторов электромагнитного поля падающей, отраженной и прошедшей волн используем граничные условия на границе раздела сред – плоскости $z = 0$. Записанные относительно тангенциальных компонент полей:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau} \quad \text{при } z = 0. \quad (8.4)$$

Приравнявая на границе раздела соотношения, описывающие электрические и магнитные поля, получаем выражения для полного поля:

$$\dot{E}_{\text{хпад}} + \dot{E}_{\text{хотр}} = \dot{E}_{\text{хпр}}, \quad \frac{\dot{E}_{\text{хпад}}}{W_1} - \frac{\dot{E}_{\text{хотр}}}{W_1} = \frac{\dot{E}_{\text{хпр}}}{W_2}, \quad (8.5)$$

в которых W_1, k_1, W_2, k_2 - соответственно волновые сопротивления и коэффициенты распространения в первой и во второй средах.

Электродинамика и распространение радиоволн

В частном случае нормального падения волны, т.е. $\varphi = 0$, разделив левые и правые части равенств (8.5) на амплитуду падающей волны и учитывая обозначения (8.1), получаем систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$1 + \dot{R} = \dot{T}, \quad \frac{1}{W_1} - \frac{\dot{R}}{W_1} = \frac{\dot{T}}{W_2}, \quad (8.6)$$

решая которую, получаем

$$\dot{R} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}, \quad \dot{T} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}. \quad (8.7)$$

Таким образом, коэффициенты Френеля при нормальном падении волны не зависят от поляризации.

8.2. Наклонное падение плоских волн на границу раздела сред. Двойное лучепреломление

При наклонном падении волны появляется зависимость также и от взаимной ориентации плоскости поляризации и плоскости падения.

В случае параллельной (вертикальной) поляризации коэффициенты Френеля будут определяться соотношениями:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{W_1 \cos \varphi - W_2 \cos \theta}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_1 \cos \varphi + W_2 \cos \theta}. \quad (8.8)$$

В случае перпендикулярной (горизонтальной) поляризации данные коэффициенты принимают вид:

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{W_2 \cos \varphi - W_1 \cos \theta}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta}, \quad \dot{T}_{\perp} = \frac{2W_2 \cos \varphi}{W_2 \cos \varphi + W_1 \cos \theta}. \quad (8.9)$$

Рассмотрим ряд частных случаев, полезных в практическом использовании.

Пусть вторая среда является идеальным металлом ($\sigma \rightarrow \infty$). В этом случае электрическое поле во второй среде, как уже отмечалось при изучении граничных условий, существовать не может, следовательно, коэффициенты прохождения T в случаях обеих поляризаций равны нулю. Соотношения (8.8), (8.9) принимают вид:

$$\dot{R}_{\parallel} = 1, \quad \dot{R}_{\perp} = -1, \quad \dot{T}_{\parallel} = \dot{T}_{\perp} = 0. \quad (8.10)$$

Анализ данных соотношений дает один очень важный вывод: отраженное электрическое поле перпендикулярно поляризованной волны после сдвинуто по фазе на π относительно падающего поля.

Второй частный случай: коэффициент отражения обращается в нуль. Физически это соответствует явлению полного прохождения волны во вторую среду. Угол падения, при котором возникает данное явление, называется **углом Брюстера** и определяется выражениями:

$$\operatorname{tg}(\varphi_{\text{Б}}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \mu_2 \varepsilon_2 - \mu_1 \varepsilon_1}}, \quad (8.10a)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{\text{Б}\perp}) = \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2}}. \quad (8.106)$$

Несложно заметить, что угол Брюстера не определен в случае немагнитных сред ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) при перпендикулярной поляризации и при параллельной поляризации в случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Таким образом, от границы раздела обычных диэлектриков перпендикулярно поляризованная волна отражается при любых углах падения.

На рисунке 8.2 показана структура поля в первой и во вторых областях в общем случае (рисунок 8.2,а), а также для частного случая при падении под углом Брюстера (рисунок 8.2,б). Анализ данного рисунка показывает, что в случае падения под произвольным углом за счет интерференции падающей и отраженной волн в первой области возникают узлы и пучности поля. В случае падения под углом Брюстера отражения в первую область не наблюдается. В связи с этим в данной области узлы и пучности отсутствуют.

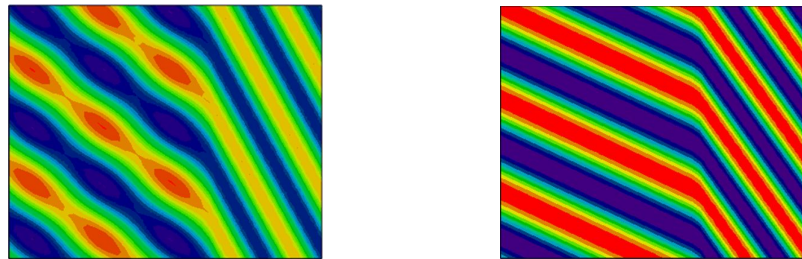


Рисунок 8.2 – Иллюстрация структуры электромагнитного поля при различных углах падения

Третий случай – падающая волна имеет круговую или эллиптическую поляризацию. Как уже отмечалось выше, данные волны можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных плоских волн, одна из которых поляризована перпендикулярно, а другая – параллельно плоскости падения. Так как условия существования угла Брюстера для параллельной и перпендикулярной поляризаций различны, то соотношение между амплитудами перпендикулярной и параллельной составляющих в отраженной и прошедшей волнах будет иным, чем в падающей волне. Это приводит к изменению поляризации отраженной и прошедшей волн по сравнению с падающей.

Четвертый случай – полное отражение на границе раздела двух диэлектриков. Если первая среда является оптически более плотной ($n_2 < n_1$ или $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), то из второго закона Снеллиуса следует, что в этом случае всегда выполняется условие $\theta > \varphi$, следовательно, найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна пойдет параллельно границе раздела сред, т.е. под углом $\theta = 90^\circ$. Данное критическое значение угла падения носит название **критического угла** или **угла полного внутреннего отражения**:

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin(n_2 / n_1). \quad (8.11)$$

При углах падения $\varphi > \varphi_{кр}$ преломленной волны в обычном понимании не существует, энергия падающей волны полностью отражается внутрь первой среды. Физически это означает, что вдоль поверхности раздела распространяется так называемая поверхностная волна, амплитуда которой убывает при удалении от границы раздела по экспоненте. На рисунке 8.3 иллюстрируется геометрия данного случая падения волны.

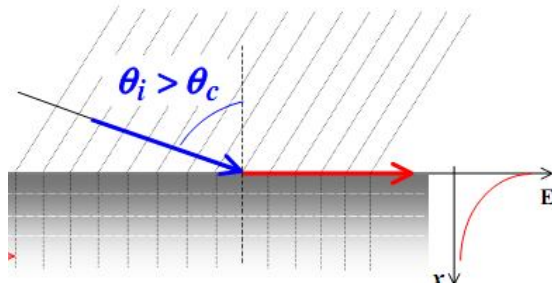


Рисунок 8.2 – Геометрия задачи падения волны под критическим углом

Коэффициенты отражения для волн обеих поляризаций описываются соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} R_{\parallel} \\ R_{\perp} \end{Bmatrix} = \mp \exp \left\{ 2i \arctg \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \\ \mu_1 / \mu_2 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}{\cos \varphi}} \right] \right\}. \quad (8.12)$$

Анализ данного выражения показывает, что модуль его равен 1. Коэффициент преломления становится комплексным, что означает затухание волны во второй среде по экспоненциальному закону. Данное явление широко используется в оптике при создании призм, изменяющих направление лучей.

Пятый частный случай - вторая среда является гиротропной. На предыдущей лекции, рассматривая свойства гиротропных сред, отмечалось, что при распространении волны в направлении, поперечном постоянному магнитному полю, волна расщепляется на две: обыкновенную и необыкновенную, имеющие различные фазовые скорости, а, следовательно, и различные коэффициенты преломления. Так как фазовые скорости последних различны, то соответствующие преломленные пути не совпадают. Данный **эффект** получил название **двойного лучепреломления**. Направления преломленных волн несложно найти, используя второй закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \theta_{об}}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_{об}} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \theta_{нб}}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_{нб}}. \quad (8.13)$$

Аналогичные выводы могут быть сделаны и для среды с диэлектрической анизотропией.

8.3 Плоские неоднородные волны на границе раздела сред

Из изложенного выше ясно, что над поверхностью раздела, где существуют падающая и отраженная волны, результирующее поле представляет собой суперпозицию данных волн. При нормальном падении падающая и отраженная волны распространяются навстречу друг другу. В случае, когда вторая среда является идеально проводящая поверхность, результирующее поле описывается соотношениями:

$$\dot{E}_{\Sigma} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = 2iE_{\text{упад}} \sin kz. \quad (8.14a)$$

$$\dot{H}_{\Sigma} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}} = 2\dot{H}_{\text{хпад}} \cos kz. \quad (8.14б)$$

Таким образом, над проводящей плоскостью устанавливается волна с узлом электрического и пучностью магнитного полей на плоскости. В общем случае при $|\dot{E}_{\text{отр}}| < |\dot{E}_{\text{пад}}|$ над плоскостью раздела устанавливается комбинированная волна.

При наклонном падении плоской волны на границу раздела сред возникает более сложная структура результирующего поля, поскольку прямая и отраженная волны распространяются под углом друг к другу. В точках, где векторы \vec{E} прямой и отраженной волн синфазны, находятся пучности электрического поля. В точках же, где векторы противофазны, будут располагаться узлы.

Выражение, определяющее положение n -го узла вдоль оси z («нуля» поля) волны, падающей под углом φ , имеет вид:

$$z_n = \frac{n\pi}{k \cos \varphi}. \quad (8.15)$$

Поверхности равных амплитуд параллельны плоскости раздела сред, а поверхности равных фаз, оставаясь плоскими, перпендикулярны ей. Над граничной поверхностью результирующая волна оказывается плоской, но неоднородной.

Так как векторы \vec{H} падающей и отраженной волн не параллельны друг другу, то можно говорить лишь об узлах и пучностях нормальных и тангенциальных составляющих. С узлами электрического поля совпадают узлы нормальной составляющей магнитного поля, а с пучностями – узлы касательной составляющей.

Выясним подробно свойства плоских неоднородных волн. Для этого падающую и отраженные волны разложим на составляющие, как показано на рисунке 8.3. При таком представлении падающей и отраженной волн поле над отражающей поверхностью можно рассматривать как результат интерференции двух пар бегущих волн. Одна пара – это волны, бегущие вдоль оси Ox навстречу друг другу. Известно, что сложение этих волн дает в результате стоячую волну. Следовательно, в направлении, перпендикулярном отражающей плоскости, энергия не передается. Другая пара волн распространяется в одну и ту же сторону и поэтому в этом направлении и осуществляется передача электромагнитной энергии. Суммарное поле описывается формулой:

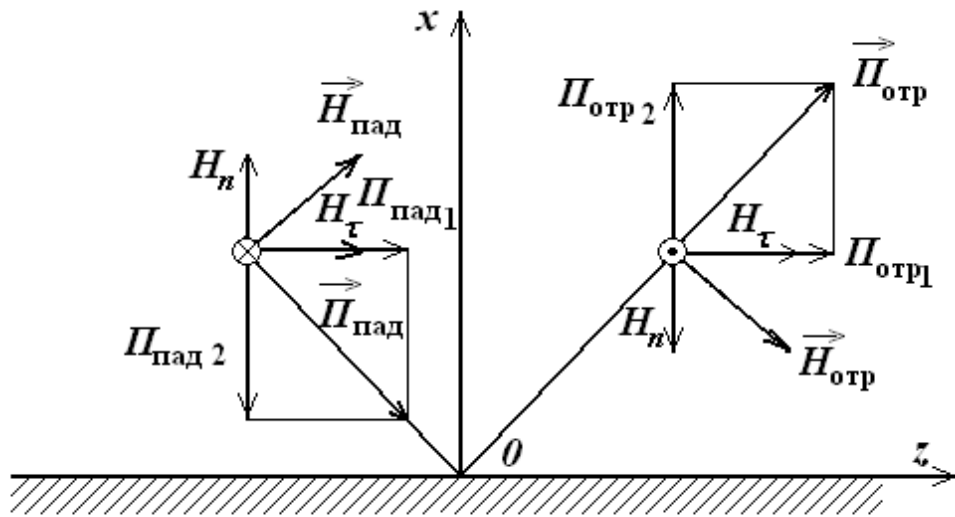


Рисунок 8.3 – Геометрия задачи о нахождении поля в области падения волны

$$\dot{E}_{y\Sigma}(x, z) = 2iE_{y\text{пад}} \sin k_x x \exp(-ik_z z). \quad (8.16)$$

Здесь k_x, k_z - соответственно продольное и поперечное волновое число (коэффициенты фазы вдоль оси Ox и Oz).

Таким образом, результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль границы раздела, которая в данном случае играет роль направляющей системы. Однако в отличие от однородной волны амплитуда неоднородной волны изменяется от нуля до максимума в направлении, перпендикулярном границе раздела сред. Поскольку **волна** экспоненциально убывает по амплитуде при удалении от граничной поверхности (как бы прилипая к поверхности), то она называется **поверхностной**.

Экспоненциальное убывание амплитуды волны не связано с потерями во второй среде (они здесь не учитываются), а определяются тем, что в среднем энергия из первой среды во вторую не переходит.

8.4 Приближенные граничные условия Леонтовича

Во многих граничных задачах бывает необходимо найти поле только в одной области, где существуют падающая и отраженная волны. При строгом решении граничной задачи, чтобы учесть влияние второй среды необходимо рассматривать поле в обеих средах одновременно. Возникает справедливый вопрос: нельзя ли задать такие граничные условия, которые дали бы возможность не рассматривать поле в той среде, где нам не нужно знать величину его? Как было показано М.А. Леонтовичем, такие граничные условия можно сформулировать, если вторая среда обладает большой проводимостью или большой проницаемостью. В этом случае, как было показано выше, поле во второй среде носит характер плоской волны, уходящей вглубь второй среды по нормали независимо от угла падения.

При этом между векторами \vec{E} и \vec{H} во второй среде существует простая связь:

$$[\vec{n}, \vec{E}] = Z[\vec{n}, [\vec{H}, \vec{n}]]. \quad (8.17)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Нормаль \vec{n} должна быть направлена внутрь первой среды. Данное граничное условие называется **граничными условиями Леонтовича (или импедансными граничными условиями)**. Волновое сопротивление второй среды называется при этом поверхностным импедансом Z .

Импедансные граничные условия целесообразно применять лишь в тех случаях, когда из каких-либо предварительных соображений можно заранее найти приближенное выражение для поверхностного импеданса Z .

Так, в случае, когда вторая среда представляется собой металлическую поверхность конечной проводимости величины поверхностного импеданса определяется формулой:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu_{a2}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{2\sigma}}(1+i). \quad (8.18)$$

Известны также выражения для тонких магнитоэлектрических слоев (одинарных и многослойных) на металлической поверхности, гофрированных структур, заполненных магнитоэлектриком.

Тема 4. Направляемые волны

Лекция N 9 Направляющие системы

9.1 Типы направляющих систем

Электромагнитная волна в устройствах и системах связи должна распространяться по определенному пути, не взаимодействуя без надобности с другими волнами, и достигать пункта назначения с наименьшими потерями. Для передачи электромагнитной волны от источника к пункту назначения используются **линии передачи**. Поскольку данные линии осуществляют ведение волны по заданному пути, то они называются также **направляющими системами**, а волна называется **направляемой**. Направляющая **система** называется **регулярной**, если она прямолинейна и ее поперечное сечение неизменно по длине.

Основным требованием к направляющим системам является требование максимальной эффективности передачи энергии при экономической целесообразности линии. Это означает, что электромагнитная волна в устройствах и системах связи должна распространяться по определенному пути, не взаимодействуя без надобности с другими волнами, и достигать пункта назначения с наименьшими потерями.

Универсальных направляющих систем, удовлетворяющих данному требованию во всех диапазонах частот, не существует. Освоение каждого нового участка частотного спектра неизменно сопровождается созданием новых типов направляющих систем. В связи с этим линии передач классифицируются по следующим критериям:

- диапазону частот (так, в диапазоне килогерц используются двухпроводные линии, в мегагерцевом диапазоне применяются коаксиальные кабели и линии поверхностной волны, в гигагерцевом диапазоне работают волноводные линии);
- видам: жесткие, гибкие, открытые, волноводы;
- типам используемых волн (пояснения будут даны немного позднее).

Так, в настоящее время интенсивно осваиваются субмиллиметровый и оптический диапазоны.

На рисунке 9.1 приведены эскизы поперечных сечений некоторых видов направляющих систем: двухпроводной линии передачи (двухсвязной открытой линии передачи) (рисунок 9.1,а); коаксиального волновода (двухсвязного волновода с соосными внешними и внутренним проводниками) (рисунок 9.1,б); микрополосковой линии передачи (двухсвязной открытой неоднородной линии передачи (рисунок 9.1,в); прямоугольного волновода (односвязного волновода, имеющего круглое поперечное сечение) (рисунок 9.1,г); круглого волновода (односвязного волновода, имеющего круглое поперечное сечение) (рисунок 9.1,д); диэлектрического волновода (открытой линии передачи нулевой связности) (рисунок 9.1,е).

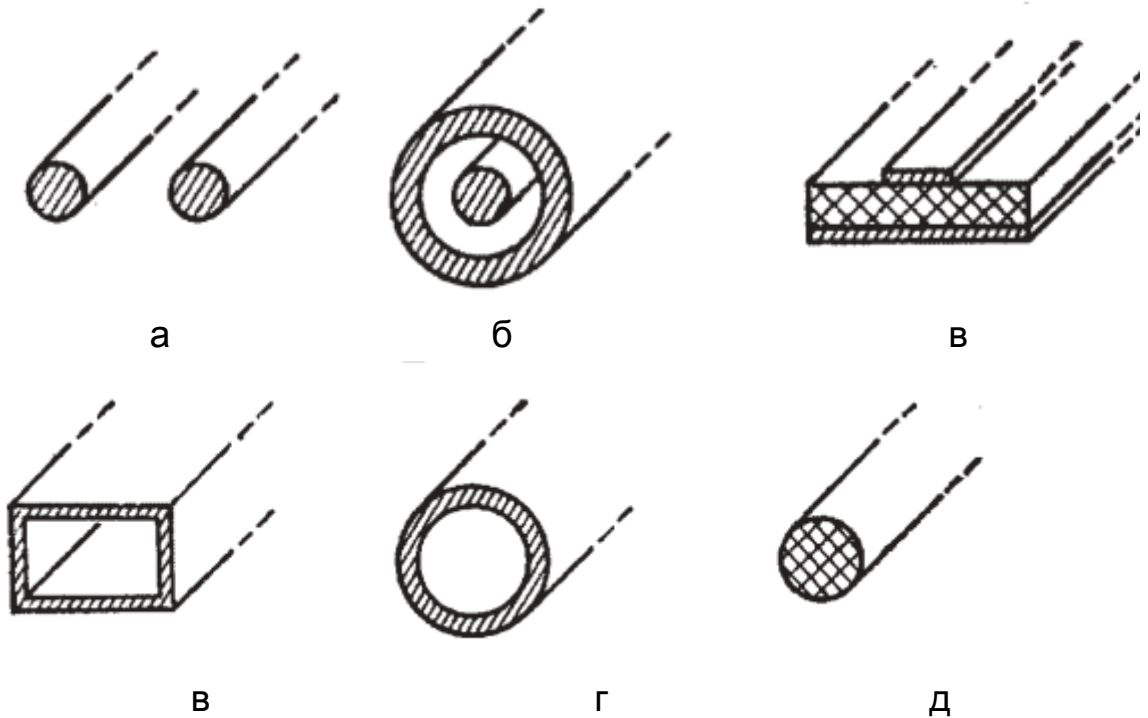


Рисунок 9.1 – Некоторые виды направляющих систем

9.2 Уравнения электродинамики для направляемых волн

Рассмотрим основные положения теории направляющих линий. Учитывая протяженность направляющей системы, при решении уравнений Максвелла целесообразно использовать обобщенную цилиндрическую ортогональную систему координат (u, v, z) , в которой образующая регулярной линии совпадает с осью Oz . В этом случае зависимость поля в регулярной линии от поперечных координат u, v должна быть одинаковой во всех поперечных сечениях, а с изменением z могут изменяться лишь фазы и амплитуды векторов поля, т.е.

$$\vec{E}(u, v, z) = \vec{E}_0(u, v) \exp(\pm \gamma z), \quad \vec{H}(u, v, z) = \vec{H}_0(u, v) \exp(\pm \gamma z). \quad (9.1)$$

В формулах (9.1) временная составляющая поля $\exp(i\omega t)$ в данных соотношениях опущена; $\exp(\pm \gamma z)$ - **множитель бегущей волны**; γ - коэффициент распространения волны в направляющей системе. Данный коэффициент связан с волновым числом среды $k = k_\beta - ik_\alpha$ в предположении о малых потерях в среде k_α соотношением $\gamma = ik_\beta = i\beta$ (k_β или β - коэффициент фазы).

Разложим коэффициент фазы в непоглощающей среде на продольную и поперечную составляющие, как показано на рисунке 9.2:

$$k^2 = \chi^2 + \beta^2. \quad (9.2)$$

В полученном соотношении, называемом **уравнением коэффициентов**, χ - **поперечный волновой коэффициент**.



Рисунок 9.2 – Разложение вектора волнового числа

Данное уравнение позволяет преобразовать векторные уравнения Гельмгольца для регулярной линии к скалярному виду:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z = 0, \quad (9.3a) \quad \nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z = 0. \quad (9.3b)$$

Причем для нахождения структуры полного поля необходимо решить с учетом граничных условий только два дифференциальных уравнения. Остальные компоненты поля могут быть найдены с использованием соотношений:

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z - \frac{i\omega\tilde{\mu}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} \dot{H}_z, \vec{i}_z], \quad (9.4a)$$

$$\vec{H}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z + \frac{i\omega\tilde{\epsilon}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} \dot{E}_z, \vec{i}_z]. \quad (9.4b)$$

В данных соотношениях знак « \perp » при градиенте показывает, что производные берутся только по поперечным координатам.

9.3 Режимы работы направляющих систем

Для анализа режимов работы линии передачи преобразуем уравнение коэффициентов к виду:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2}. \quad (9.5)$$

Возможные типы решений и их физическая трактовка приведены в таблице 9.1. Анализ данных таблицы 9.1 показывает, что критический режим выделяется особо. Введем для него ряд определений.

Таблица 9.1 – Типы решений и их физическая трактовка

Соотношение k и χ	Тип β	Распространение колебаний	Режим работы линии передачи
$k > \chi$	Вещественное число	Бегущие волны	Докритический
$k = \chi$	Нуль	Распространение волн прекращается	Критический
$k < \chi$	Мнимое число	Не распространяющиеся колебания	Закритический (режим отсечки). Волновод как реактивная нагрузка

Критическая частота определяется соотношением:

$$f_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi} = \frac{k}{2\pi\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\tilde{\mu}_a}} = \frac{\chi}{2\pi\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\tilde{\mu}_a}}, \quad (9.6)$$

в котором $\tilde{\epsilon}_a, \tilde{\mu}_a$ - параметры среды, заполняющей волновод.

Значение длины волны генератора, соответствующее данной частоте, называется **критической длиной волны** в исследуемом волноводе и определяется соотношением

$$\lambda_{кр} = 2\pi / \chi. \quad (9.7)$$

В соответствии с определением режимов работы волновода, распространение волны по направляющей системе имеет место лишь когда $\lambda_{в} < \lambda_{кр}$, т.е. если $f > f_{кр}$.

Учитывая (9.7), выражение (9.5) принимает вид:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (9.8)$$

где λ_0 - длина волны в свободном пространстве.

Закон зависимости длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве носит название **дисперсионной характеристики волновода** и описывается формулой:

$$\lambda_{в} = \lambda_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (9.9)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Анализ данного соотношения показывает, что длина волны в волноводе всегда больше длины волны в неограниченном пространстве при той же частоте.

Фазовая скорость может быть найдена на основе использования выражения

$$v_{\phi} = c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2} . \quad (9.10)$$

Рассмотрим типы направляемых волн в линии передачи. Как уже отмечалось ранее, перенос энергии в направляющих системах осуществляется вдоль оси z во введенной нами цилиндрической системе координат. Это означает, что вектор Пойнтинга, обуславливающей передачу энергии вдоль продольной оси направляющей системы, имеет продольную компоненту. Учитывая ортогональность вектора Пойнтинга и компонент электрического и магнитного полей, можно сделать вывод, что компоненты электромагнитного поля должны иметь поперечные составляющие.

Класс волны определяется наличием либо отсутствием продольных составляющих поля E и H , параллельных направлению распространения. При классификации используется два принципа: либо указывается, какой вектор имеет продольную составляющую, либо какой вектор целиком лежит в поперечной плоскости. Классификация в соответствии с данным принципом приведена в таблице 9.2 и пояснена на рисунке 9.3.

Тип волны, называемый также **модой**, определяется сложностью структуры поля волны данного класса (числом максимумов и минимумов поля в поперечном сечении) для конкретного направляющего устройства. Он обозначается двумя числовыми индексами, например, E_{01} , H_{11} .

Таблица 9.2 - Зависимость класса волны от продольных составляющих

Тип волны	Продольные составляющие полей
T -волны (рисунок 9.3,а)	$E_z = 0, H_z = 0$
E -волны (TM -волны) (рисунок 9.3,б)	$E_z \neq 0, H_z = 0$
H -волны (TE -волны) (рисунок 9.3,в)	$E_z = 0, H_z \neq 0$
Гибридные волны (EH - или HE -волны) (рисунок 9.3,г)	$E_z \neq 0, H_z \neq 0$

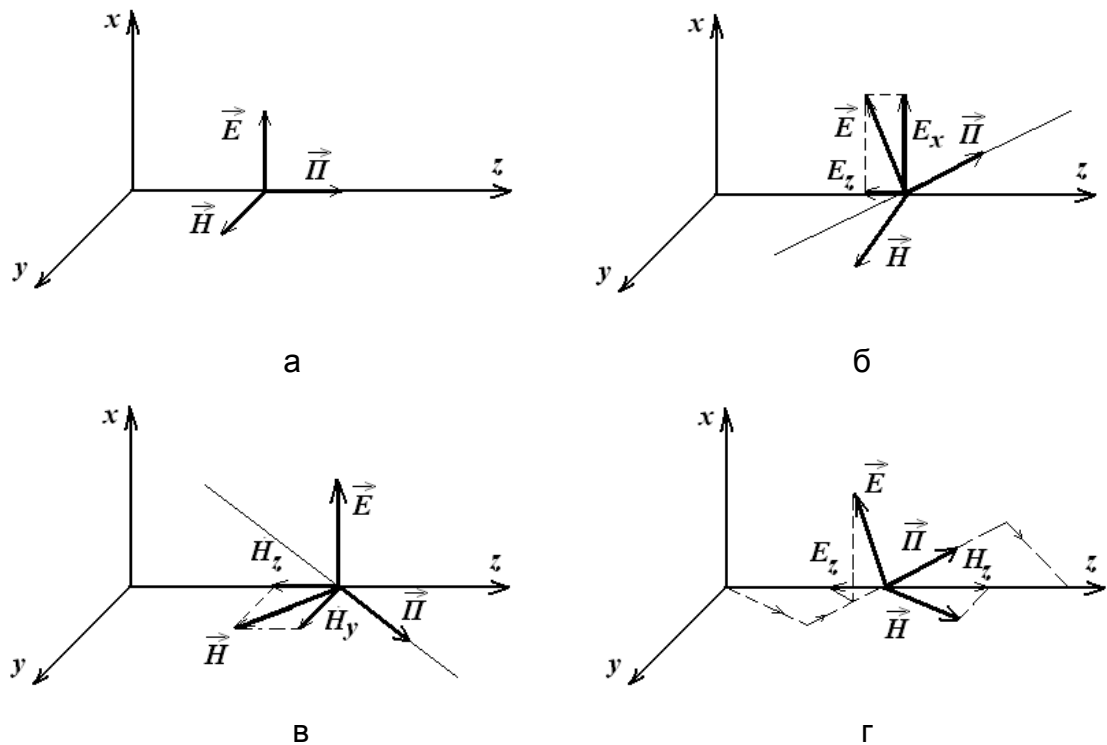


Рисунок 9.3 – Пояснения к классификации направляемых волн

9.4 Полые волноводы

Одними из основных типов полых (пустых) волноводов являются прямоугольный и круглый волноводы. Рассмотрим структуру электромагнитного поля в прямоугольном волноводе. В данном волноводе, представляющем собой полую металлическую трубу, энергия распространяется только в виде волн E и H -типов.

Для понимания структуры поля в волноводе может быть использовано несколько подходов. Например, концепция Бриллюэна, рассматривающая поле в волноводе (кроме волн TEM) как результат сложения плоских однородных волн, называемых **парциальными**, многократно отраженных от его граничных поверхностей. Подход подразумевает лучевая трактовка явлений в волноводах.

Рассмотрим концепцию парциальных волн на примерах. Для чего обратимся к рисунку 9.4.

Пусть направляемая волна распространяется вдоль некоторой оси z . Возможны два типа распространения электромагнитной волны:

- распространение параллельно оси z ;
- распространение по ломаным (в общем случае по кривым) линиям при общем поступательном движении вдоль оси z .

В первом случае векторы электрического и магнитного поля должны находиться в плоскости, перпендикулярной оси z , т.е. имеет место волна TEM . Во втором случае векторы электрического и магнитного полей должны находиться в плоскостях, перпендикулярных соответствующим участкам ломаной или кривой

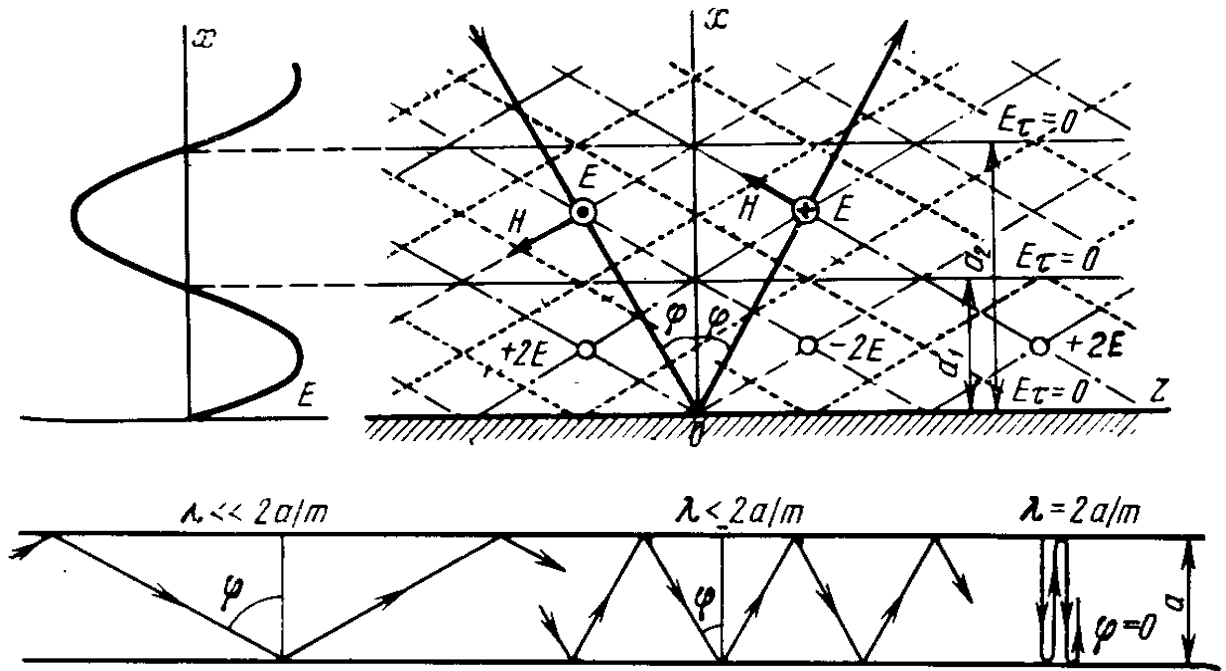


Рисунок 9.4 – Пояснение концепции Бриллюэна

линии и, следовательно, по меньшей мере один из векторов имеет направление, не перпендикулярное оси. Таким образом, второй случай соответствует волнам E - или H -, распространяющимся вдоль оси z . При этом парциальная ТЕМ-волна распространяется вдоль линии, образующей угол φ с осью z . В силу того, что путь, пройденный за одно и то же время фронтом волны вдоль оси z , больше, чем по направлению распространения, фазовая скорость u волн E и H всегда превышает скорость света в среде.

При наклонном падении на границу суммарная волна может быть представлена в виде двух волн: стоячей – в плоскости, перпендикулярной плоскости раздела, и бегущей – вдоль границы раздела сред (рисунок 8.3). Предположим теперь, что данное направление совпадает с образующей направляющей системы. Далее, в плоскости, проходящей через узлы стоячей волны электрического поля, описываемые условием $\sin \chi x = 0$, будем располагать вторую плоскость. Положение данной плоскости определяется выражением:

$$\chi x = \pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.11a)$$

или

$$a = \frac{m\pi}{\chi} = \frac{m\pi}{k \cos \varphi} = \frac{m\lambda}{2 \cos \varphi}. \quad (9.11b)$$

В соотношениях (9.11) индекс m указывает на число полуволн, укладываемых между проводящими пластинами. При постоянных a и m угол падения парциальной волны зависит от λ : $\cos \varphi = m\lambda / (2a)$. Если $\lambda \ll 2a/m$, то угол φ близок к 90° , парциальные волны падают на стенки волновода полого. По мере роста длины волны угол φ уменьшается и, наконец, при $\lambda = 2a/m$ становится равным нулю, распространение волны прекращается. Таким образом, размер

Электродинамика и распространение радиоволн

волновода ограничивает диапазон длин волн, которые способны в нем распространяться.

Ограничив пространство металлическими поверхностями еще в двух плоскостях, приходим к полю в прямоугольном волноводе, в котором распространяется волна типа E или поперечно-магнитная волна:

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \exp(-\gamma_{mn}z). \quad (9.12)$$

Здесь B_{mn} - амплитуда гармоник, определяемой парой индексов m и n . Величины a и b связаны с геометрическими размерами прямоугольного волновода, как показано на рисунке 9.5.

Таким образом, поперечный волновой коэффициент волновода зависит от выбора чисел m и n :

$$\chi_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (9.12)$$

Каждой комбинации m и n соответствует своя структура поля, т.е. **мода. Волна**, имеющая минимальную критическую частоту из всех возможных волн, относящихся к рассматриваемому классу, называется **основной** или **волной основного типа**.

Дополним приведенные выше соотношения выражением, описывающим **характеристическое сопротивление волновода**. Данный параметр определяется отношением поперечных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} , для волн электрического типа описывается выражением

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (9.13)$$

Для поперечно-магнитных волн основной волной является волна E_{11} .

Для поперечно-электрической волны (H-волны) решение имеет вид

$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\gamma_{mn}z), \quad (9.14)$$

где A_{mn} - комплексная амплитуда гармоники с индексами m и n поля в волноводе.

Характеристическое сопротивление волновода для поперечно-электрических волн равно

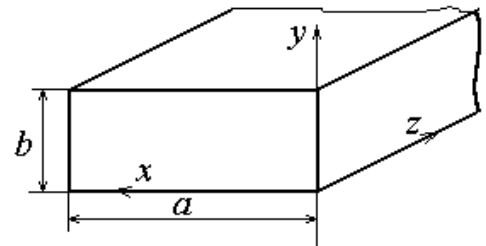


Рисунок 9.5 – Геометрия

Электродинамика и распространение радиоволн

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (9.15)$$

Если полагать что $a > b$, то низшим типом волн среди волн H является волна H_{10} , у которой $\lambda_{крH_{10}} = 2a$. Поскольку $\lambda_{крH_{10}} > \lambda_{крE_{11}}$, то волна H_{10} является низшим типом волн среди всех возможных типов волн в прямоугольном волноводе.

Механизм переноса энергии H - и E -волнами проиллюстрирован на рисунках 9.6,а и 9.6,б соответственно.

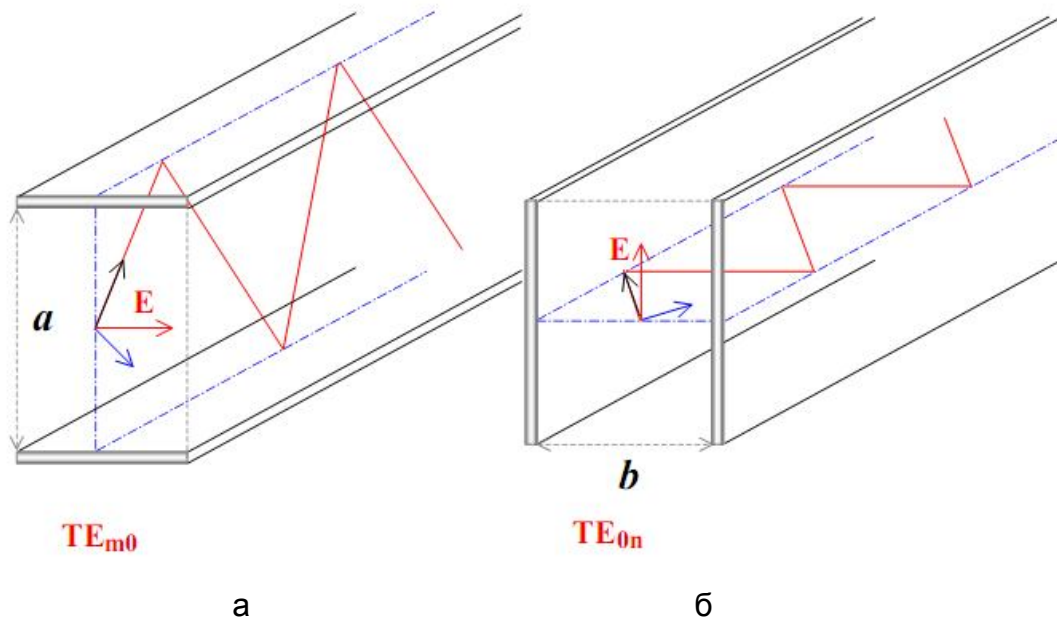


Рисунок 9.6 – Иллюстрация механизма переноса энергии волнами H - и E -типов

Мощность, переносимая волной любого типа в волноводе, определяется путем интегрирования вектора Пойнтинга по поперечному сечению S волновода. В частном случае волны основного типа H_{10} прямоугольного волновода данная формула принимает вид:

$$P = E_0^2 \frac{ab}{4W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}. \quad (9.16)$$

Анализ выражений, описывающих характеристические сопротивления волн E - и H -типов показывает, что волновое сопротивление волн H в отличие от волн E больше, чем W_0 .

Для круглого волновода радиусом a (геометрия задачи показана на рисунке 9.7) для обеспечения разделения электрического и магнитного полей уравнения Гельмгольца решаются в цилиндрической системе координат. В данной системе координат решения для компонент электромагнитного поля записываются с использованием соотношений:

- для поперечно-магнитных волн:

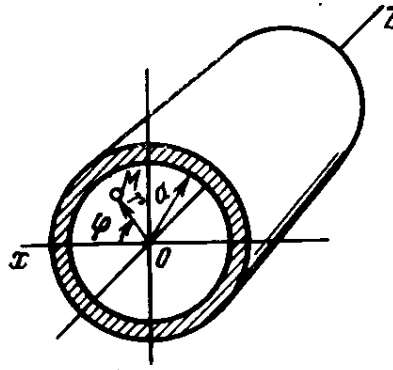


Рисунок 9.7 – геометрия задачи о возбуждении круглого волновода

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} \rho \right) \cos(m\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z), \quad (9.17)$$

$$(f_{кр})_{TM} = \frac{\nu_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (9.18)$$

$$(\lambda_{кр})_{TM} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (9.19)$$

Здесь $J_m(\cdot)$ - функция Бесселя m -го порядка; ν_{mn} - корни уравнения $J_m(\nu) = 0$. Значения корней данного уравнения приводятся в справочниках по математике.

- для поперечно-электрических волн:

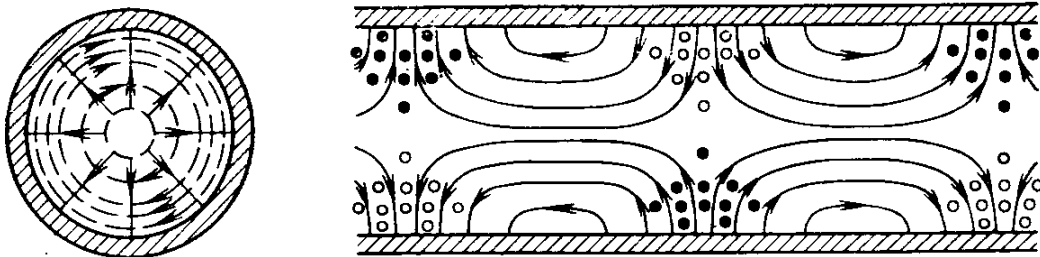
$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} J_m \left(\frac{\nu'_{mn}}{a} \rho \right) \cos(n\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z), \quad (9.20)$$

$$(f_{кр})_{TE} = \frac{\nu'_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (9.21)$$

$$(\lambda_{кр})_{TE} = \frac{2\pi a}{\nu'_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (9.22)$$

Здесь ν'_{mn} - корни уравнения $J'_m(\nu) = 0$.

Структура поля волны низшего E_{01} показана на рисунке 9.8.


 Рисунок 9.8 – Структура поля волны E_{01} в круглом волноводе

Лекция N 10. Волноводы с волнами типа T

10.1 Коаксиальный волновод

На предыдущей лекции было рассмотрено распространение E - и H -типов волн в полом прямоугольном волновом. Кроме того, было отмечено, что в данном типе направляющих волн распространение волн типа T невозможно. Одним из видов направляющих систем, в которых возможно распространение как волн типа E - и H -, так и типа T , является коаксиальная линия, состоящая из двух изолированных друг от друга металлических проводников, как показано на рисунке 10.1.

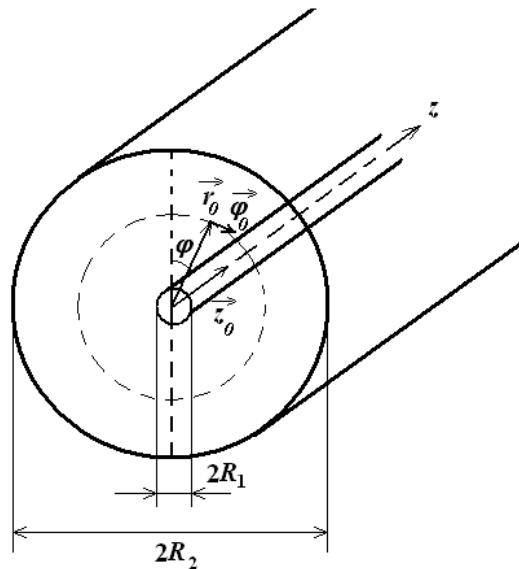


Рисунок 10.1 – Геометрия коаксиального кабеля

Определим основной тип волны в данной линии. Для волн типа T волновые уравнения принимают вид:

$$\chi^2 \vec{E}_{\perp} = 0, \quad (10.1a)$$

$$\chi^2 \vec{H}_{\perp} = 0. \quad (10.1b)$$

Нетривиальное решение данных уравнений возможно лишь при $\chi = 0$, т.е. $f_{кр} = 0$ и $\lambda_{кр} = \infty$. Следовательно, волна является низшим типом волны в коаксиальной линии и существует на любой частоте. Коэффициент фазы и фазовая скорость данного типа волн совпадают с аналогичными параметрами волны в свободном пространстве.

Для нахождения компонент поля волны TEM совместим ось $0z$ цилиндрической системы координат $0r\phi z$ с осью внутреннего проводника коаксиальной линии, ориентируя оси системы. Учитывая решение системы уравнений (10.1), уравнения Гельмгольца сводятся к уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \vec{E}_{\perp} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H}_{\perp} = 0. \quad (10.2)$$

Как известно, поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, является **потенциальным**. Решение системы (10.2), описывающее компоненты поля, имеет вид:

Электродинамика и распространение радиоволн

$$E_r = E_0 \frac{R_1}{r} \exp(-i\beta z), \quad H_\varphi = \frac{E_r}{W_0} = \frac{E_0}{W_0} \frac{R_1}{r} \exp(-i\beta z). \quad (10.3)$$

Кроме того, потенциальный характер электрических и магнитных полей позволяет говорить о полном токе и о напряжении в коаксиальной линии. Разность потенциалов между центральным и внешним проводниками равна

$$\dot{U} = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_r dr = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \exp(-i\beta z). \quad (10.4)$$

Ток, текущий по поверхности центрального проводника и по внутренней поверхности внешнего проводника, равен

$$\dot{I} = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} R_1 H_\varphi(R_1, \varphi) d\varphi = \frac{2\pi R_1 E_0}{W_0} \exp(-i\beta z). \quad (10.5)$$

Отношение напряжения \dot{U} к току \dot{I} в режиме бегущей линии называется *волновым сопротивлением коаксиальной линии*

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{W_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad [\text{Ом}]. \quad (10.6)$$

Для поперечно-магнитного и поперечно-электрического полей продольные составляющие определяются методом разделения переменных, как было выполнено для круглого волновода. Получаемое при этом решение аналогично решению, найденному для круглого волновода с граничными условиями

$$\text{для } E\text{-волн} \quad E_z = 0 \quad \text{на } L, \quad (10.7a)$$

$$\text{для } H\text{-волн} \quad \partial H_z / \partial n = 0 \quad \text{на } L. \quad (10.7b)$$

Анализ полученного решения показывает, что полем первого высшего типа является H_{11} , у которого

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = \frac{2\pi}{v_{H_{11}}} \approx \pi(R_1 + R_2). \quad (10.8)$$

Поскольку у волны основного типа TEM $\lambda_{\text{кр}} = \infty$, то одноволновый режим в коаксиальном волноводе обеспечивается при выполнении условий

$$\lambda > R_1 + R_2. \quad (10.9)$$

10.2 Полосковые и микрополосковые линии

Еще одним типом линии передачи, базирующемся на распространении поперечных электромагнитных волн являются полосковые и микрополосковые линии передач. Данные линии передачи в последнее время нашли широкое применение в технике СВЧ при разработке печатных и интегральных схем для работы в сантиметровом и дециметровом диапазонах. Их изготавливают на основе диэлектрических пластин, покрытых металлической фольгой толщиной 10...100 мкм. Используются высокочастотные диэлектрики: фторопласт, полистирол, полиолефин, стеклоткань, пропитанная фторопластом или кремнийорганической смолой. Диэлектрические пластины, на которые наносят фольгу, называют *подложкой*.

Электродинамика и распространение радиоволн

Конструктивно полосковая линия может быть выполнена в виде несимметричной или симметричной линии. Несимметричная линия – открытый волновод, симметричная линия – экранированный волновод. Геометрия данных линий представлена на рисунке 10.2. Несложно заметить, что данные конструкции представляют собой модификацию симметричной двух проводной линии и коаксиального волновода.

Строгая теория полосковых линий довольно сложна. Так называемая *квази-Т-волна* в этих линиях *может существовать*, если ширина токонесущего проводника и расстояние между ним и заземленной пластиной меньше половины длины волны в линии передач. При этом электрическое и магнитное поля сосредоточены в основном в пространстве между проводником и заземленной пластиной. Картины силовых линий электромагнитных волн показаны на рисунке 10.3. Электрическое поле в поперечной плоскости может быть описано уравнением Лапласа (10.2).

В полосковых линиях передачи с диэлектрическим основанием волны типа *TEM* не могут распространяться в чистом виде из-за неоднородности диэлектрика. Однако теории и опыт показывают, что поля и поток мощности сосредоточиваются главным образом в диэлектрике между токонесущим проводником и заземленной пластиной. Поэтому можно принять допущение об однородности диэлектрика, заполняющего всю линию передачи.

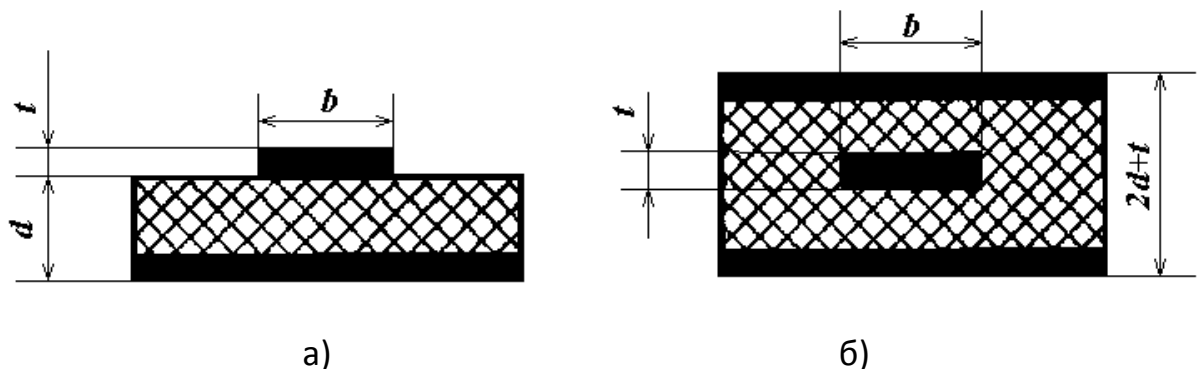


Рисунок 10.2 – Геометрия открытой и закрытой полосковых линий

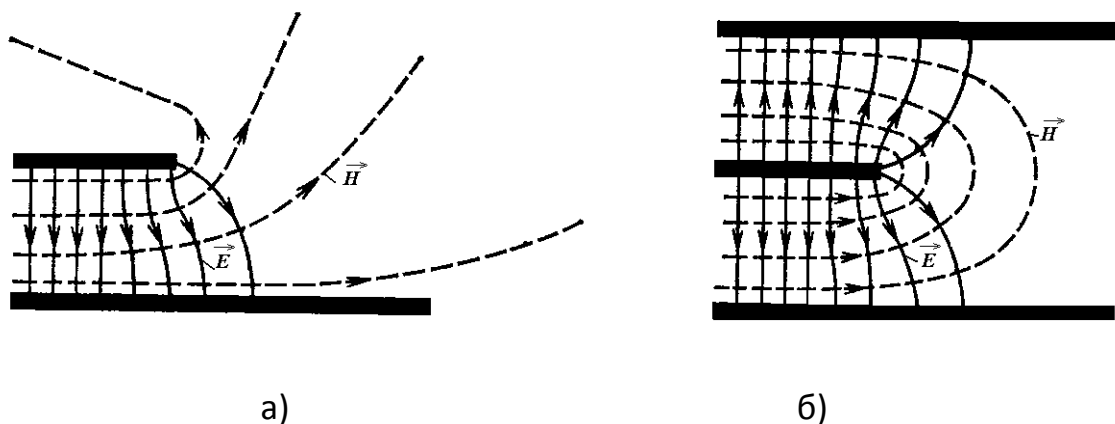


Рисунок 10.3 – Структура поля в открытых и закрытых полосковых линиях

Электродинамика и распространение радиоволн

Для практических расчетов удобны следующие приближенные соотношения, которые хорошо согласуются с опытными данными.

Волновые сопротивления с учетом толщины токонесущего проводника t и без данного учета рассчитываются по формулам, приведенным в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Соотношения для расчета волновых сопротивлений полосковых линий

Тип линии	С учетом толщины t токонесущего проводника	Без учета толщины
Несимметричная	$Z_B = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{cases} \frac{100(1-t/d)}{1+b/d} & b/d < 2, \\ \frac{1}{1+b/d \left(\frac{1}{1-b/d} \right)} & b/d > 2. \end{cases}$	$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d}$
Симметричная	$Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{cases} \frac{1-t/d}{1+b/d} & b/d < 2, \\ \frac{1}{1+b/d \left(\frac{1}{1-t/d} \right)} & b/d > 2. \end{cases}$	$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1+b/d}$

К недостаткам полосковых линий относятся сравнительно большое затухание и малые значения пропускной мощности. Эти линии применяют, главным образом, в тех устройствах, в которых не требуется передача значительной мощности и основное значение придается миниатюризации, надежности и точности изготовления.

10.3 Линии поверхностных волн. Замедляющие структуры

Рассмотрим физический механизм работы линий поверхностной волны, к которым относятся диэлектрические и оптические волноводы, металлическая плоскость, покрытая слоем диэлектрика.

Начнем с изучения соотношений, описывающих металлический экран, покрытый слоем диэлектрика. Как отмечалось ранее, падающая на границу раздела с другой средой волна при определенных условиях испытывает полное внутреннее отражение. При этом во второй среде образуется распространяющаяся вдоль границы раздела поверхностная волна, амплитуда которой во второй среде экспоненциально убывает в направлении нормали к границе раздела. Следовательно, в диэлектрическом слое, покрывающем металлическую плоскость, могут образоваться поверхностные направляемые волны, распространяющиеся в определенном направлении. Такие волны возникают в результате скачкообразного распространения волны *TEM*, последовательно отражающихся от поверхности металла и границы раздела между диэлектриком и воздухом.

Определим структуру электрических волн, распространяющихся параллельно оси Oz , совпадающей с металлическим листом. Толщина слоя диэлектрика

Электродинамика и распространение радиоволн

равна d , относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрического слоя ε_{a1} (рисунок 10.4). Ось Oy нормальна к границе раздела сред. Плоскость и покрывающий ее диэлектрик однородны вдоль оси Ox , следовательно, зависимость составляющих поля от данной координаты будет отсутствовать и можно решать двумерную задачу.

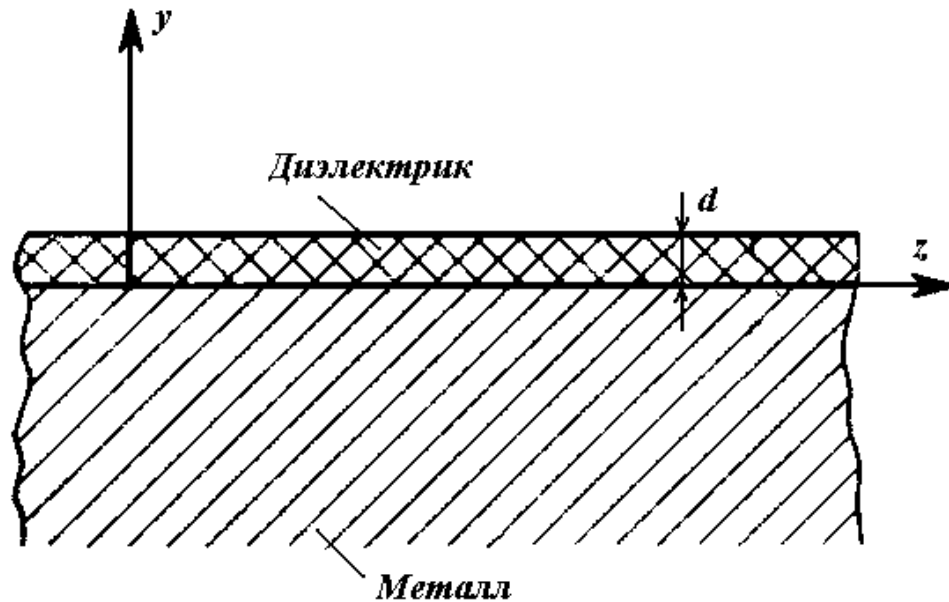


Рисунок 10.4 – Замедляющая структура «диэлектрик на металле»

Волновое уравнение записывается для пространства, заполненного диэлектриком ($y < d$) и пространства над диэлектриком ($y > d$):

$$\frac{d^2 \dot{E}_z^{(1)}}{dy^2} + \chi_{\perp 1}^2 \dot{E}_z^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2 \dot{E}_z^{(2)}}{dy^2} + \chi_{\perp 2}^2 \dot{E}_z^{(2)} = 0, \quad (10.10)$$

в котором

$$\chi_{\perp 1}^2 = \omega^2 \varepsilon_{a1} \mu_0 - \beta^2, \quad (10.11a) \quad \chi_{\perp 2}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2. \quad (10.11b)$$

Вид решения записывается с учетом следующих рассуждений. Во-первых, на поверхности металла касательная составляющая электрического поля равна нулю. Во-вторых, в диэлектрике вдоль оси Oy должна образовываться стоячая волна. В-третьих, в пространстве над диэлектриком амплитуда поля вдоль оси Oy должна убывать по экспоненциальному закону. С учетом сказанного решение уравнений (10.10) записывается в виде:

$$\dot{E}_z^{(1)} = A \sin \chi_{\perp 1} y \exp(-i\beta z), \quad (10.12a)$$

$$\dot{E}_z^{(2)} = B \exp(-\alpha_{\perp 2} y) \exp(-i\beta z), \quad (10.12b)$$

где $\alpha_{\perp 2}$ - действительная положительная величина, связанная с поперечным и продольным волновыми числами в свободном пространстве равенством

$$\alpha_{\perp 2} = i\chi_{\perp 2} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}.$$

Подставляя вид решения (10.12) в соотношения (10.10), получают тангенциальные компоненты электромагнитного поля в диэлектрике и в свободном пространстве. Учитывая граничные условия (равенство касательных составляющих поля на границе диэлектрик-воздух), получаем трансцендентное уравнение для нахождения поперечных волновых чисел

$$\operatorname{tg} \chi_{\perp 1} d = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_0} \frac{\alpha_{\perp 2}}{\chi_{\perp 1}}. \quad (10.13)$$

Полное внутреннее отражение на границе диэлектрик-воздух прекращается, когда парциальная волна *TEM* падает на границу под углом, меньшим критического. Аналогичное явление имеет место и в рассматриваемой направляющей системе, что ограничивает частоты, на которых может распространяться поверхностная волна:

$$k_0^2 - \beta^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 < 0. \quad (10.14)$$

Частота, при которой $\alpha_{\perp 2} = 0$, называется *критической*.

Одним из параметров, характеризующих поверхностную волну, является *поверхностное сопротивление (импеданс)*:

$$Z_S^E = \frac{\dot{E}_z^{(2)}}{\dot{H}_x^{(2)}} = i \frac{\alpha_{\perp 2}}{\omega \varepsilon_0}. \quad (10.15)$$

Несложно заметить, что *импеданс реактивный, индуктивный* по характеру сопротивления, пока выполняется неравенство (10.14). Это означает, что у распространяющейся волны сдвиг фаз между \dot{E}_z и \dot{H}_x равен 90° , и отсутствует средний за период поток энергии, направленный перпендикулярно оси Oz . Структура поля показана на рисунке 10.5.

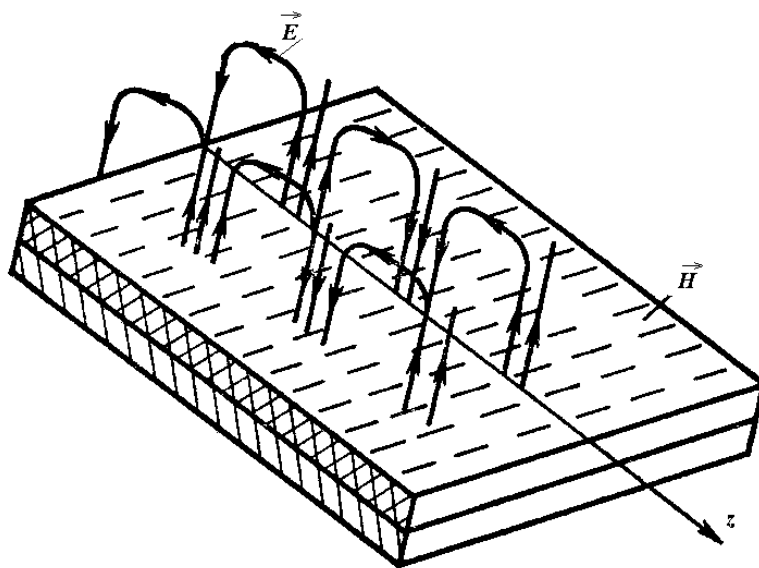


Рисунок 10.5 – Распространение поверхностной волны в слое диэлектрика на металле

Электродинамика и распространение радиоволн

Существуют различные способы создания реактивного поверхностного сопротивления. Например, можно создать канавки в металлической поверхности, как показано на рисунке 10.6.

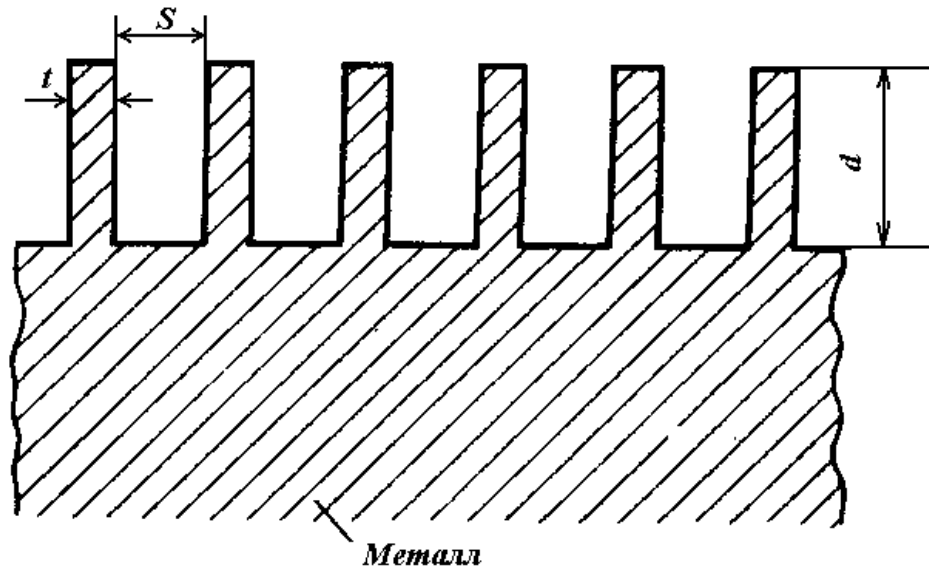


Рисунок 10.6 – Замедляющая структура в виде металлической гофры

Каждую канавку подобной гребенчатой структуры можно рассматривать как короткозамкнутый отрезок линии длиной d . Поэтому, когда глубина канавки не превышает четверти длины волны, ее входное сопротивление чисто реактивное и носит индуктивный характер. Если число канавок на единицу длины достаточно велико ($s + t \ll \lambda$), то можно пренебречь влиянием тонких металлических перегородок и полагать, что в сечении $y = 0$ расположена плоскость, в любой точке которой поверхностное сопротивление реактивное и носит индуктивный характер. Следовательно, когда $d < \lambda / 4$, вдоль гребенчатой структуры, как и вдоль металлической плоскости с диэлектриком, распространяется поверхностная электрическая волна. Структура волны весьма близка к структуре волны E , показанной на рисунке 10.5.

Как следует из неравенства (10.14), коэффициент распространения β поверхностной волны не превышает коэффициента распространения в среде с параметрами ε_0, μ_0 . Поэтому фазовая скорость поверхностной волны всегда ниже скорости света в среде, окружающей линию передачи. Волны, обладающие этим свойством, называются замедленными.

Для поля \vec{H} поверхностное сопротивление (поверхностный импеданс) равен

$$Z_S^H = -i \frac{\omega \mu_0}{\alpha_{\perp 2}}. \quad (10.16)$$

Следовательно, для волн H величина поверхностного импеданса является чисто реактивной и носит емкостной характер.

Низшим типом среди волн H является волна, у которой

$$\frac{\pi}{2} < \chi_{\perp 1} d < \pi. \quad (10.17)$$

Критическая длина волны выражается формулой:

$$\lambda_{кр} = 4d\sqrt{\varepsilon - 1}. \quad (10.18)$$

Поскольку в направляющих системах волны распространяются лишь на тех частотах, где $\lambda < \lambda_{кр}$, то должно выполняться неравенство

$$d < \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon - 1}}. \quad (10.19)$$

Расчеты, проводимые на основе использования данных формул, достаточно сложны и требуют знания в теории комплексного переменного. Однако рассматриваемые структуры часто используются на практике для управления характеристиками направленности и согласования антенн. В связи с этим сформулированы соответствующие граничные условия импедансного типа, позволяющие ускорить процесс вычисления структуры электромагнитного поля. Так, для металлической поверхности, покрытой слоем диэлектрика (магнитодиэлектрика), значения изотропного поверхностного импеданса определяется формулами:

$$Z_S^E = -\frac{1}{Z_S^H} = \frac{ikd}{\varepsilon} (\varepsilon\mu - \cos^2 \theta). \quad (10.20)$$

Для гребенчатых структур тензор поверхностного импеданса является анизотропным и описывается формулой:

$$Z_a = \frac{it}{S} \operatorname{tg}(kd \sin \theta \sqrt{\varepsilon\mu}). \quad (10.21)$$

В случае продольной ребристой структуры отлична от нуля компонента $Z_S^E = Z_a$, в случае поперечной - $Z_S^H = -Z_a$). При наклонном падении волны существуют обе компоненты тензора поверхностного импеданса.

10.4 Диэлектрические волноводы. Оптические волноводы и световоды

Подобная рассмотренной в предыдущем вопросе, но более сложная картина поля будет наблюдаться в круглом диэлектрическом волноводе. Из решения электродинамической задачи для данного волновода следует, что волны в диэлектрическом волноводе будут гибридными, определяемые всеми шестью компонентами электромагнитного поля. Среди бесчисленного множества типов волн, могущих существовать в диэлектрическом волноводе, наибольший интерес представляет волна типа HE_{11} . Данный тип волны имеет бесконечно большую критическую частоту и может распространяться вдоль диэлектрического стержня на всех частотах и при любом диаметре стержня. Следует отметить, что *критическая частота волны в диэлектрическом волноводе имеет другой смысл, чем в полом волноводе. При длине волны меньше критической не происходит экспоненциального затухания энергии, а энергия, передаваемая по диэлектрическому стержню, начинает излучаться в свободное пространство.*

Электродинамика и распространение радиоволн

Величина фазовой скорости распространения волны в диэлектрическом волноводе лежит между величиной фазовой скорости волны TEM , распространяющейся в среде, окружающей волновод, и величиной фазовой скорости этой же волны в среде, имеющей постоянные материала, из которого изготовлен волновод.

Напряженность поля волны HE_{11} при удалении от диэлектрического стержня спадает приблизительно по экспоненциальному закону. Часть энергии передается внутри диэлектрика, а остальная часть – за его пределами. Излучения энергии не происходит, поскольку поле, как и в случае с плоскостью, покрытой слоем диэлектрика, «прижимается» к диэлектрическому стержню. *Поле распределяется тем ближе к стержню, чем больше отношение диаметра стержня к длине волны в свободном пространстве и чем выше диэлектрическая проницаемость материала, из которого изготовлен стержень.* Для работы на волне типа HE_{11} диаметр d диэлектрического волновода должен быть достаточно малым, чтобы не допустить существования ближайшего высшего типа волны. Критическая длина волны ближайшего высшего типа составляет величину

$$\lambda_{кр} \approx 1,3d\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (10.22)$$

В диапазоне сантиметровых волн электрические параметры диэлектрических линий передачи хуже, чем прямоугольного и круглого волноводов. Диэлектрические линии целесообразно применять, начиная с диапазона миллиметровых волн и кончая диапазоном световых волн ($\lambda = 0,75 \dots 0,4$ мкм).

В оптическом диапазоне используются *световоды*, образованные из двухслойного (плакированного) стеклянного волокна с коэффициентами преломления $n_1 > n_2$. Поверхностная волна в таком волноводе, возникающая за счет эффекта полного внутреннего отражения на поверхности внешнего слоя, не достигает практически наружной границы и концентрируется внутри световода. Важнейшими характеристиками световода, определяющими возможность его использования в различных областях науки и техники, являются оптические потери, обусловленные поглощением и рассеянием светового пучка и информационная полоса пропускания. Материалом для световодов служит кварцевое стекло, а различные показатели преломления сердцевин и оболочки достигаются легированием стекла, например, бором, германием, фосфором.

10.5 Длинные линии и их параметры

При анализе направляющих систем отмечалось, что основным требованием, предъявляемым к направляющим системам, является минимизация энергетических затрат. Рассмотрим более подробно данный вопрос, опуская анализ структуры электромагнитного поля внутри линии, что позволяет использовать более простой математический аппарат, так называемые эквивалентные длинные линии.

Линия называется длинной, если длина регулярной линии передачи превышает четверть длины волны в линии λ_l . Напомним, что регулярной линия будет в случае неизменности ее параметров вдоль одной из координат. В направляющих линиях данное требование, в основном, выполняется.

Электродинамика и распространение радиоволн

Предположим, что отрезок регулярной линии передачи включен между источником электромагнитных колебаний (генератором) и оконечным устройством (излучающим раскрывом антенны), которое в дальнейшем будем называть *нагрузкой*. Пусть линия работает в одноволновом режиме, что предполагает экспоненциальное затухание амплитуд волн всех типов, кроме низшего, по мере удаления от места возбуждения. При таких условиях обрыв линии передачи и включение нагрузки в общем случае эквивалентны изменению граничных условий. Вызываемое при этом соответствующее изменение структуры электромагнитных полей в линии можно трактовать как появление дополнительной волны, распространяющейся от конца линии к ее началу (*отраженная волна*) (см. рисунок 10.7).

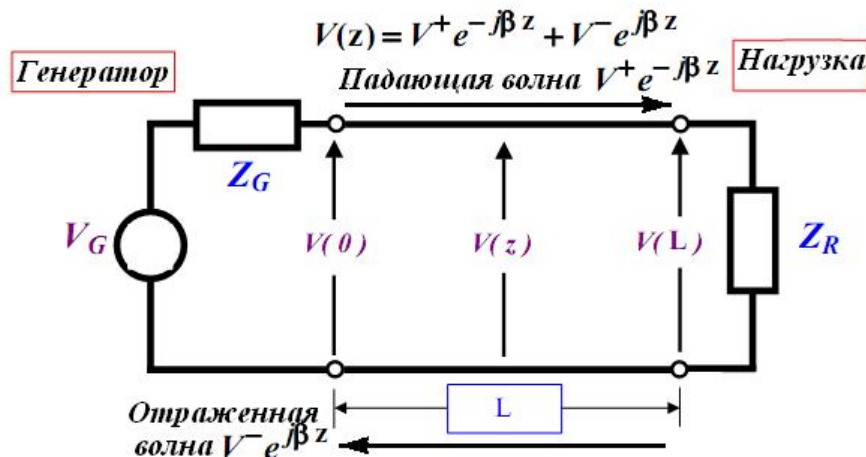


Рисунок 10.7 – Геометрия длинной линии

На достаточно большом (обычно порядка нескольких длин волн) расстоянии от нагрузки в одноволновом режиме структура поля отраженной волны в плоскости поперечного сечения линии практически не отличается от структур волны низшего типа. Следовательно, если в месте включения нагрузки образуется такая структура поля, что в состав отраженной волны не входит волна низшего типа, то из закона сохранения энергии вытекает, что вся энергия падающей волны поглощается в нагрузке, так как сама линия передачи предполагается без потерь. Говорят, что в этом случае *линия идеально согласована с нагрузкой*, либо, что линия работает в *режиме бегущей волны*.

Поскольку процессы, протекающие в длинной линии, определяются амплитудно-фазовыми соотношениями между падающей и отраженной волнами, то при проектировании регулярных линий передачи может быть использован упрощенный математический аппарат, исключающий информация о структуре полей в линии с использованием эквивалентных длинных линий (схем замещения). При этом электромагнитные процессы описываются не величинами напряженностей электрического и магнитного полей, а их эквивалентами – величинами напряжения и тока.

Физические свойства длинной линии определяются значениями четырех распределенных вдоль ее длины параметров: индуктивности L , емкости C , продольного активного сопротивления R и поперечной активной проводимости G . Данные величины составляют систему первичных параметров линии. Если эти параметры

Электродинамика и распространение радиоволн

распределены вдоль линии равномерно (т.е. не зависят от z), то линия называется однородной. В противном случае - неоднородной линией.

Для однородных линий вводятся понятия погонных параметров, рассчитанных на единицу длины. Кроме того, поскольку в радиотехнике длинные линии применяются на сравнительно высоких частотах, то оказывается возможным пренебречь потерями энергии в активных сопротивлениях, т.е. исключить из рассмотрения погонное сопротивление и погонную проводимость. Линии, в которых такое пренебрежение допустимо, называются *линиями без потерь*.

В соответствии с данным подходом любой бесконечно малый отрезок линии dz , из показанной на рисунке 10.8,а двухпроводной длинной линии с комплексным сопротивлением нагрузки $Z_n = R_n + iX_n$, может быть заменен на эквивалентную схему (рисунок 10.8,б). На данной схеме стрелками обозначены направления отсчета напряжения U и тока I в линии; dU и dI – приращения напряжения и тока в линии на элементе длины dz . С использованием эквивалентной схемы (рисунок 10.8,б) выражения для приращения напряжения и тока можно записать в виде:

$$dU = I(dR + i\omega dL), \quad dI = U(dG + i\omega dC). \quad (10.23)$$

Подставляя в данные выражения значения параметров схемы

$$dR = Rdz, \quad dG = Gdz, \quad dC = Cdz, \quad dL = Ldz, \quad Z = R + i\omega L, \\ Y = G + i\omega C,$$

несложно записать *однородные волновые уравнения длинной линии*:

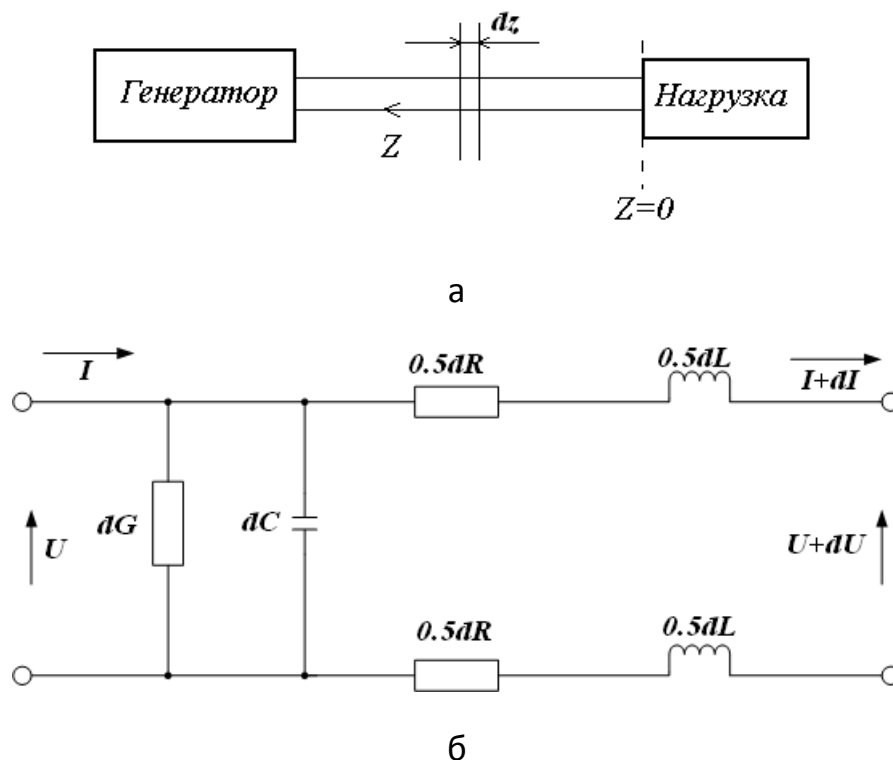


Рисунок 10.8 – Распределенные параметры длинной линии

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0, \quad \frac{d^2 I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0. \quad (10.24)$$

В данных уравнения коэффициент

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \alpha + i\beta \quad (10.25)$$

называется *коэффициентом распространения в длинной линии*.

Решения уравнений (10.24) известны и могут быть записаны в виде:

$$U = A_U \exp(\gamma z) + B_U \exp(-\gamma z), \quad I = A_I \exp(\gamma z) + B_I \exp(-\gamma z). \quad (10.26)$$

Несложно заметить, что первое слагаемое в данных соотношениях описывает падающую волну напряжения или тока, распространяющуюся от генератора к нагрузке, а второе – отраженную волну, распространяющуюся от нагрузки к генератору. Коэффициенты A_U , A_I представляют собой комплексные амплитуды падающих волн напряжения и тока соответственно, а коэффициенты B_U , B_I – комплексные амплитуды отраженных волн напряжения и тока.

Степень согласования линии передачи с нагрузкой характеризуется комплексным коэффициентом отражения по напряжению, определяемому выражением:

$$\Gamma = \frac{B_U}{A_U}. \quad (10.27)$$

Модуль коэффициента отражения изменяется в пределах $0 \leq |\Gamma| \leq 1$. Коэффициент отражения может быть найден либо на нагрузке, либо в определенной точке линии. В последнем случае выражение для его определения принимает вид:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0) \exp(2i\gamma z), \quad (10.28)$$

где $\Gamma(0)$ – коэффициент отражения в нагрузке (т.е. сечении $z=0$).

При расчетах длинных линий часто используются соотношения:

$$Z_H / W = \tilde{Z}_H = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \quad (10.29a) \quad \Gamma = W \frac{1 - \tilde{Z}_H}{1 + \tilde{Z}_H}. \quad (10.29b)$$

Для оценки степени согласования линии с нагрузкой вводится понятие *коэффициента бегущей волны* КБВ:

$$КБВ = \frac{|A_U| + |B_U|}{|A_U| - |B_U|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (10.30)$$

Однако на практике современные приборы на индикаторных устройствах отображают обратную величину – меру рассогласования – *коэффициент стоячей волны*:

$$КСВ = \frac{|A_U| + |B_U|}{|A_U| - |B_U|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}. \quad (10.31)$$

Пределы изменения данных коэффициентов составляют: $0 \leq КБВ \leq 1$ и $1 \leq КСВ < \infty$.

Электродинамика и распространение радиоволн

В линии без потерь на основе модуля коэффициента отражения по напряжению несложно вычислить и коэффициент полезного действия η :

$$\eta = 1 - |\Gamma|^2. \quad (10.32)$$

Важной характеристикой длинной линии является входное сопротивление линии, которое определяется в каждом сечении линии как отношение напряжения к току в этом сечении:

$$Z_{\text{вх}}(z) = \frac{U(z)}{I(z)}. \quad (10.33a)$$

Как и для коэффициента отражения, рассчитывается также входное сопротивление линии в начале цепи:

$$Z_{\text{вх}}(z) = W \frac{1 - \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}{1 + \Gamma(0) \exp(-2\gamma z)}, \quad (10.33b)$$

Для согласованной линии $\tilde{Z}_{\text{н}} = 1$ и входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению $\tilde{Z}_{\text{вх}} = 1$. Поскольку напряжение и ток в линии изменяются от сечения к сечению, то входное сопротивление линии изменяется относительно продольной координаты. При этом говорят о трансформирующих свойствах линии, а саму линию рассматривают как трансформатор.

Различают три режима работы линии без потерь:

- режим бегущей волны,
- режим стоячей волны,
- режим смешанных волн.

Характеристики длинной линии при указанных режимах показаны в таблице 10.2.

Таблица 10.2 – Режимы работы линии

Режимы работы линии	Параметры линии	Характеристика работы
Режим бегущей волны	$ \Gamma = 1$ $\text{КБВ} = \text{КСВН} = 1$	Только падающая волна, распространяющаяся от генератора к нагрузке. Мощность полностью выделяется в нагрузку.
Режим смешанных волн	$0 < \Gamma < 1$ $0 < \text{КБВ} < 1$ $1 < \text{КСВ} < \infty$	Часть мощности падающей волны теряется в нагрузке, а оставшая часть в виде отраженной волны возвращается обратно в генератор.
Режим стоячей волны	$ \Gamma = 1$ $\text{КБВ} = 0$ $\text{КСВ} = \infty$	Амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей. Энергия падающей волны полностью отражается от нагрузки и возвращается обратно в генератор

Электродинамика и распространение радиоволн

Анализ данной таблицы показывает, что режим бегущей волны характеризуется наличием только падающей волны, распространяющейся от генератора к нагрузке. Отраженная волна отсутствует. Мощность, переносимая падающей волной, полностью выделяется в нагрузку. В этом режиме $|\Gamma| = 0$, КБВ=КСВ=1.

Режим стоячей волны характеризуется тем, что амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей, т.е. энергия падающей волны полностью отражается от нагрузки и возвращается в обратном направлении в генератор. В этом режиме $|\Gamma| = 1$, КБВ=0, КСВ = ∞ .

В режиме смешанных волн часть мощности падающей волны теряется в нагрузке, а оставшаяся часть в виде отраженной волны возвращается обратно в генератор.

Лекция N 11. Колебательные системы СВЧ

11.1 Электромагнитные колебания в объемных резонаторах

В радиотехнике большую роль играют колебательные контуры, обеспечивающие, например, подстройку на требуемую частоту. Резонаторы широко используются в радиотехнических устройствах, являясь неотъемлемой частью многих усилителей, большинства генераторов, приемников, частотных фильтров и измерителей частоты. Основное назначение резонаторов состоит в том, чтобы долгое время поддерживать периодические колебания, вызванные внешним импульсом. Резонатор обладает частотной избирательностью по отношению к внешнему гармоническому воздействию: амплитуда его колебаний максимальна на резонансной частоте и уменьшается по мере удаления от нее.

В низкочастотной области колебательный контур выполняют из катушки индуктивности L и конденсатора емкостью C . Данный контур, как известно из курса дисциплины «Основы теории цепей» осуществляет преобразование энергии магнитного поля катушки в электрическую энергию конденсатора и наоборот. В диапазоне СВЧ, когда в качестве направляющих систем применяются волноводы, для построения колебательного контура применяется замкнутая металлическая оболочка полости, называемая *резонатором*.

Работа резонаторов основывается на использовании эффекта непрерывного преобразования электрического поля в магнитное и наоборот, описываемого уравнениями Максвелла. Для исключения потерь, связанных с излучением поля в пространство, объем, в котором сосредоточено электромагнитное поле, ограничивают металлическими стенками. В связи с этим резонаторы данной конструкции называют *объемными*. Наиболее простым способом реализации данной конструкции является выполнение резонаторов в виде короткозамкнутых отрезков металлических волноводов. По аналогии с направляющими системами резонаторы такого типа называются *закрытыми*. Пример конструкции закрытого волновода показан на рисунке 11.1.

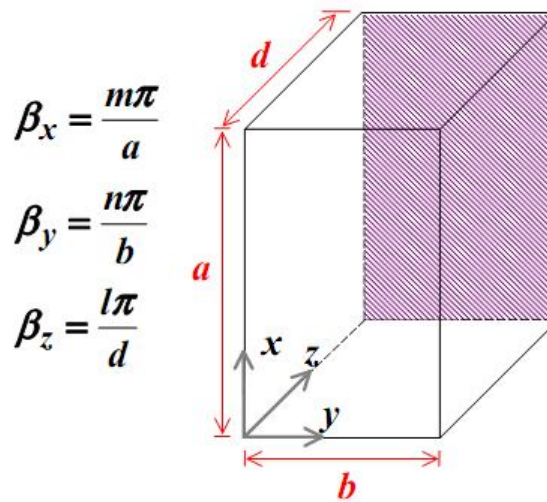


Рисунок 11.1 – Геометрия полого резонатора

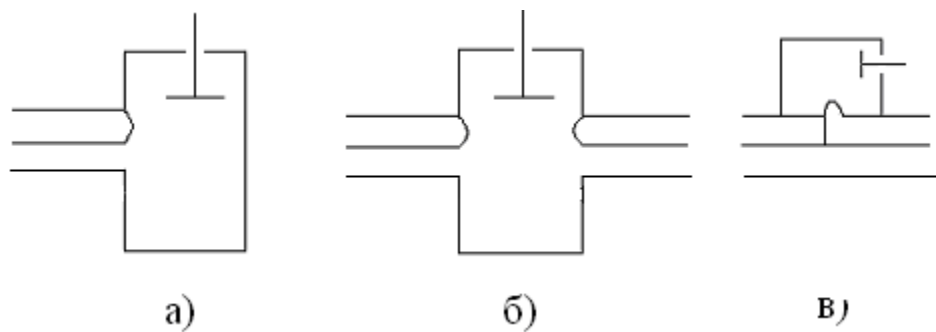


Рисунок 11.2 – Схемы включения резонаторов в высокочастотный тракт: а – с одним элементом связи; б – с двумя элементами связи; в – в виде ответвителя энергии

В теории резонаторов различают режимы собственных (свободных) и вынужденных колебаний. *Собственные колебания* – это возможные поля в объемном резонаторе при отсутствии сторонних источников. Собственные колебания резонатора включают в себя бесконечное множество различных типов колебаний (типов полей), каждый из которых характеризуется своей картиной векторных линий и определенной собственной длиной волны. Однако в реальных резонаторах существуют некоторые потери энергии, а, следовательно, колебания становятся затухающими. Незатухающие колебания в реальном резонаторе существуют в режиме *вынужденных колебаний*, при котором в резонатор через элемент связи вводят энергию стороннего источника (генератора). Для возбуждения резонатора необходимо, чтобы частота колебаний генератора была бы равна одной из резонансных частот объемного резонатора. Связь с направляющей системой осуществляется через элемент связи. Примеры включения резонаторов в высокочастотный тракт показаны на рисунке 11.2.

Задачу о типах колебаний в резонаторе будем решать в предположении отсутствия потерь в резонаторе и на основе теории волн в регулярных волноводах.

Электродинамика и распространение радиоволн

При этом будем рассматривать объемные резонаторы как замкнутые поперечными стенками отрезки соответствующих волноводов.

Введение металлических стенок выполняется таким образом, чтобы вдоль направляющей системы образовалось целое число полувольт. В образовавшемся объемном резонаторе без потерь будут существовать собственные (свободные) электромагнитные колебания, на поддержание которых поступления энергии больше не требуется. При этом стоячую волну можно рассматривать как результат многократных упорядоченных отражений исходной бегущей волны регулярно волновода от обеих поперечных стенок.

При анализе поля в резонаторе рассмотрим бегущую волну произвольного V -го типа, падающую на эту стенку (индекс v заменяет символ H_{mn} , E_{mn} или T).

В цилиндрическом резонаторе длиной d комплексные амплитуды поля колебаний для класса E -волн выражаются соотношениями:

$$E_x = E_{x0} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right), \quad (11.1a)$$

$$E_y = E_{y0} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right), \quad (11.1б)$$

$$E_z = E_{z0} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right), \quad (11.1в)$$

$$H_x = -i \frac{\beta_z E_y - \beta_y E_z}{\omega\mu} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d}z\right), \quad (11.2a)$$

$$H_y = -i \frac{\beta_x E_z - \beta_z E_x}{\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d}z\right), \quad (11.2б)$$

$$H_z = -i \frac{\beta_y E_x - \beta_x E_y}{\omega\mu} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right). \quad (11.2в)$$

Длины волны собственных колебаний s -го типа (индекс s заменяет символ H_{mnp} , E_{mnp} , T_p) в цилиндрическом резонаторе без потерь определяется соотношением:

$$\lambda_s = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{d}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{кр\ v}^2}}}. \quad (11.3)$$

Тип колебаний в резонаторе, имеющий наибольшую длину волны собственных колебаний, называют *основным*. *Типы колебаний*, имеющие различные структуры, но одинаковые собственные длины волн, называют *вырожденными*. В качестве рабочих в резонаторах используют как основной тип, так и высшие типы колебаний: вследствие высокой частотной селективности резонатора вблизи собственной частоты рабочего типа колебаний поля других типов практически отсутствуют. Вырождение рабочего типа колебаний приводит к усложнению структуры

Электродинамика и распространение радиоволн

поля в резонаторе, увеличению потерь в нем и искажению его частотных характеристик. Подавление вырожденного паразитного типа осуществляется обеспечением его сильного затухания в резонаторе.

Следует отметить еще одно отличие резонатора от волновода. Если в волноводе частоты собственных колебаний определяют нижние границы частот (частоты отсечки f_c), начиная с которых возбуждаются волноводные моды, как показано на рисунке 11.3,а, то в резонаторе частоты собственных колебаний являются дискретными величинами (резонансными частотами f_r), только на которых и возможно возбуждение волн (см. рисунок 11.3,б).

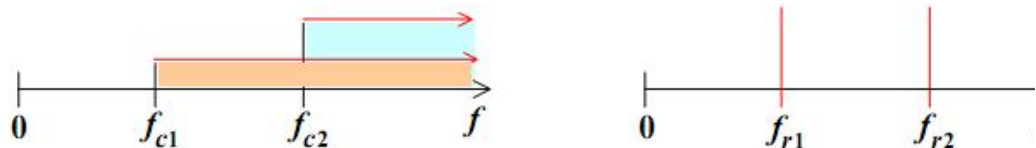


Рисунок 11.3 – Частоты возбуждения мод: а – в волноводе;

б – в резонаторе.

11.2 Поля в полых прямоугольных и круглых резонаторах

Получим соотношение, описывающее собственную длину волны в прямоугольном резонаторе. Для него все три оси координат равноправны, следовательно, разделение на типы колебаний H_{mnp} , E_{mnp} оказывается условным (продольной может быть выбрана любая ось). Собственная длина волны в прямоугольном резонаторе с учетом формулы (11.3) и выражения, определяющего критическую длину в прямоугольном волноводе, определяется соотношением:

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}}. \quad (11.4)$$

Согласно данному выражению *наибольшее значение критической длины волны, соответствующее основному типу колебаний, получается в том случае, если индекс при наименьшем ребре резонатора равен нулю и оба остальных индекса равны единице. При этом наибольшая собственная длина волны сравнима с линейными размерами резонатора. Типы колебаний с тремя отличными от нуля индексами, по крайней мере, двукратно вырождены. Это определяется тем, что поля типов H_{mn} , E_{mn} с одинаковыми индексами имеют одинаковые критические длины.*

Наиболее часто используемым типом колебаний в прямоугольном резонаторе является колебание H_{101} , у которого вдоль оси Oz укладывается одна полу-волна колебания H_{10} . Иллюстрация структуры поля показана на рисунке 11.4.

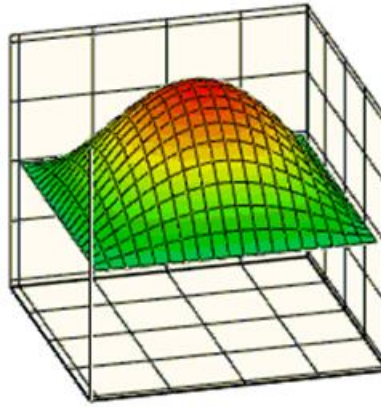


Рисунок 11.4 – Структура пол колебания волны H_{101}

Для круглых цилиндрических резонаторов формула для собственных длин волн принимает вид:

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\delta_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}}, \quad (11.5)$$

где $\delta_{mn} = v_{mn}$ для волны типа H (поперечно-электрической) и $\delta_{mn} = v'_{mn}$ для волны типа E (поперечно-магнитной). Формулу (11.5) иногда удобнее представить в виде:

$$\left(\frac{D}{\lambda_{mnl}}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} \left(\frac{D}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{mn}}{\pi}\right)^2, \quad (11.6)$$

в котором $D = 2a$ - диаметр резонатора. Номограммы, образованные семейством зависимостей $(D/\lambda_s)^2$ от $(D/\ell)^2$, позволяют легко решать задачи о соотношениях между размерами резонатора и длиной волны генератора.

Основными типами колебаний в кругом волноводе являются: H_{011} и E_{010} .

11.3 Добротность объемных закрытых резонаторов

Важнейшим параметром любого резонатора, так же как и любого низкочастотного контура, является его добротность. Значение добротности характеризует качества многих основных СВЧ устройств: стабильность генераторов, частотно-избирательные свойства фильтров, чувствительность приемных устройств и т.д.

Добротностью объемного резонатора для s -го типа, определяющей полосу пропускания системы и скорость затухания собственных колебаний, называют отношение

$$Q_s = 2\pi \frac{w}{w_{\Pi}} = \omega_s \frac{w}{P_{\Pi.ср.}}, \quad (11.7)$$

где w - запасенная при резонансе внутри полости электромагнитная энергия s -го типа колебаний; w_{Π} - энергия полных потерь за время одного периода T_s ;

Электродинамика и распространение радиоволн

$P_{п.ср}$ - средняя за период мощность полных потерь ($w_{п} = P_{п.ср} T_s$); ω_s - частота собственных колебаний.

Связь между добротностью объемного резонатора и длительностью процесса свободных колебаний в нем определяется соотношением:

$$W = W_{нач} \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right), \quad (11.8)$$

где $W_{нач}$ - начальный запас энергии в резонаторе при $t=0$.

Для нахождения добротности часто используют переход к эквивалентной схеме резонатора. Введение эквивалентных параметров при анализе процессов в резонаторах СВЧ определяется удобством использования колебательных систем с сосредоточенными параметрами при переходе к микроминиатюризации резонаторов, например, для изготовления их методами печатной технологии.

Переход осуществляется по следующему алгоритму.

1. Каждый объёмный резонатор для данного типа колебаний приближённо можно представить в виде эквивалентной схемы с индуктивностью L , ёмкостью C и сопротивлением потерь контура $r = 1/\sigma$ [Ом·м], как показано на рисунке 11.4,а.

2. Далее осуществляется переход к последовательной реактивности $X = (\omega L - 1/\omega C)$ и реактивной проводимости контура $B = 1/X$ (рисунок 11.4,б).

3. Поскольку резонатор может быть дополнен внешней нагрузкой R_n , то сопротивление резонатора представляется в виде

$$r = r_0 + R_n, \quad (11.9)$$

где r_0 - собственное сопротивление резонатора (рисунок 11.4,в).

Нагруженная добротность Q_n состоит из собственной (ненагруженной) добротности Q_0 и внешней добротности $Q_{вн}$. Причем

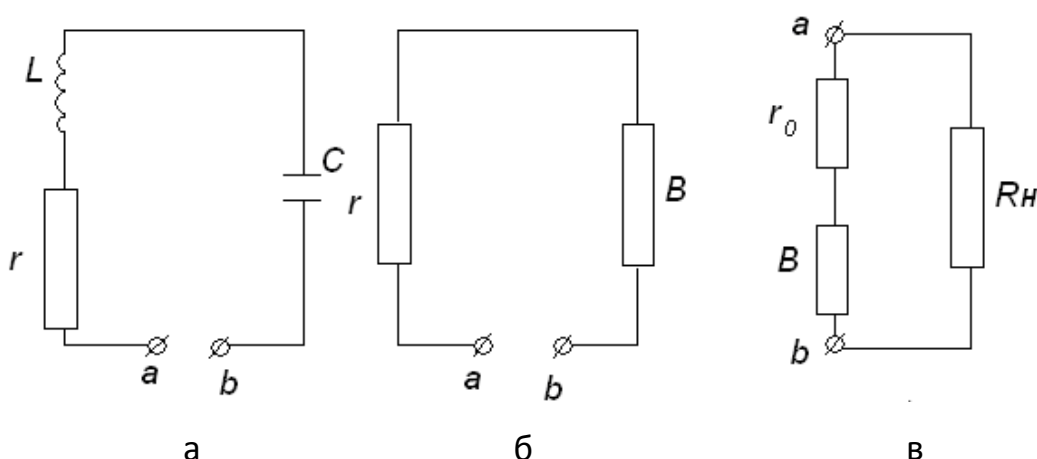


Рисунок 11.4 - Эквивалентные схемы резонаторов:

а – с индуктивностью L , ёмкостью C и сопротивлением потерь r ,
б – с последовательной реактивностью; в – с внешней нагрузкой

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}}. \quad (11.10)$$

Собственная (ненагруженная) добротность Q_0 учитывает энергию, рассеянную в самом резонаторе на резонансной частоте. Добротность, зависящую от мощности полных потерь, часто называют *нагруженной добротностью резонатора*.

Величина собственной добротности может быть найдена через параметры эквивалентной схемы резонатора:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{C_{\Sigma}}{L_{\Sigma}}} R_{\Sigma} \approx \omega_0 L / r_0. \quad (11.11)$$

Анализ данных соотношений показывает, что величина собственной добротности не зависит от применяемой эквивалентной схемы, поскольку не зависит от связи.

Собственную добротность можно также выразить через ω_0 и ширину полосы пропускания $\Delta\omega_0$:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}, \quad (11.12)$$

где $\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, а ω_2, ω_1 - частоты половинной мощности.

Внешняя добротность, определяемая свойствами нагрузки, находится по формуле:

$$Q_{вн} \approx \omega_0 L / r_{вн}. \quad (11.13)$$

Таким образом, собственная добротность определяется потерями в самом резонаторе, а нагруженная добротность зависит еще и от потерь во внешних цепях, подключённых к резонатору через элементы связи. При слабой связи резонаторов с внешними цепями значение нагруженной добротности близко к собственной добротности резонатора.

Для учета влияния каждого источника потерь вводятся частичные добротности. Определение частичных добротностей проводят приближенными методами, основанными на допущении, что мощности потерь являются независимыми друг от друга величинами и могут быть вычислены раздельно.

При нахождении добротности, энергия, запасенная в резонаторе, связана с электрическим или магнитным полем и может быть найдена через максимальную энергию одного из этих полей. В случае однородной среды с параметрами $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}$, заполняющей внутреннюю полость V , согласно теореме Умова-Пойнтинга имеем:

$$W = W_{\Sigma, \text{макс}} = \frac{\varepsilon_{a1}}{2} \int_V E_m^2 dV = W_{M, \text{макс}} = \frac{\mu_{a1}}{2} \int_V H_m^2 dV. \quad (11.14)$$

При заполнении полости средой с потерями ($\sigma_1 \neq 0$) частичная добротность потерь в среде определяется соотношением:

Электродинамика и распространение радиоволн

$$Q_{сд} = \omega_s \frac{w}{P_{д.ср}} = \omega_s \frac{w}{\frac{\sigma_1}{2} \int_V E_m^2 dV} = \omega_s \frac{\varepsilon_{a1}}{\sigma_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_1^3}, \quad (11.15)$$

в котором $\operatorname{tg} \delta_1^3$ - тангенс угла диэлектрических потерь среды на частоте ω_s .

Частичная добротность резонатора, обусловленная мощностью потерь в металлических стенках резонатора, описывается выражением:

$$Q_{с.м} = \omega_s \frac{w}{P_{м.ср}} = \omega_s \frac{\mu_{a1}}{r_s} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\oint_S H_{\tau m}^2 dS}, \quad (11.16)$$

где $r_s = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega_s}{2\sigma_2}}$ - активное поверхностное сопротивление металлических

стенок; $H_{\tau m}$ - амплитуда касательной к стенке компоненты вектора \vec{H} .

Для колебаний типа H_{101} выражение, описывающее собственную добротность, принимает вид:

$$Q_{H_{101}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{r_s} \frac{abd(a^2 + b^2)}{a^3(d + 2b) + d^3(a + 2b)}. \quad (11.17)$$

Как показывает расчет, собственная добротность прямоугольного резонатора достигает десятков тысяч в сантиметровом диапазоне волн.

Добротность важнейших типов колебаний в цилиндрических резонаторах рассчитываются по формулам:

$$Q_{E_{010}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_s} \frac{ad}{a + d}, \quad Q_{E_{011}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_s} \frac{ad}{2a + d}, \quad (11.18)$$

$$Q_{H_{011}} = \frac{\omega_{mnp} \mu_a}{2r_s \mu_0^2} \frac{\omega_{mnp}^2 \varepsilon_a \mu_a a^2 d}{\frac{d}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{d^2}}. \quad (11.19)$$

Тема 5. Основные понятия дифракции электромагнитных волн

Лекция N 12. Электродинамические задачи дифракции

12.1 Строгая постановка дифракционных задач

При своем распространении электромагнитные волны сталкиваются с телами, расположенными как вблизи, так и вдали от источников электромагнитного поля. При этом наблюдается огибание и отражение электромагнитной волной от поверхности тела, что приводит к изменению структуры излученного источником поля. Явление изменения структуры поля первичной волны при падении ее на тело называется *дифракцией*.

Волна называется *первичной*, если она возбуждается сторонними токами, возникающими в результате действия источников, имеющих неэлектромагнитную природу, или является приходящей из бесконечности. Рассеянное телом электромагнитное поле будем называть *вторичной волной*. Данное разделение основывается на причинно-следственной связи и является условным. Сумма первичного и вторичного полей называется *полным полем*.

Исследования явлений дифракции на реальных телах, имеющих различные конфигурации, размеры и другие параметры, можно проводить аналитическими и численными методами, а также экспериментально. При этом точные аналитические методы решения дифракционных задач, полученные в замкнутой форме, предполагают решение дифференциальных уравнений в частных производных в той системе координат, в которой координатные поверхности совпадали или были близки к граничным поверхностям. Данные поверхности получили название канонических. При указанных условиях возможно разделение компонент электрического и магнитного полей.

Примерами канонических поверхностей являются, в частности, круговой, эллиптический, параболический цилиндры, бесконечный клин, шар. Полученные для канонических поверхностей решения могут играть роль эталонных решений, поскольку с их помощью можно проверять точность приближенных решений.

Для ряда поверхностей более сложной формы можно для анализа использовать метод конформных отображений. Однако в случае сложных граничных поверхностей отображающую комплексную функцию найти не удастся. Анализ дифракционных полей таких сложных тел проводят с помощью численных методов.

Строгая постановка дифракционных задач выглядит следующим образом. Имеется тело, геометрия поверхности S которого описывается какой-то функцией

\mathcal{R} . На данное тело падает электромагнитная волна $(\vec{E}^{\text{пад}}, \vec{H}^{\text{пад}})$, возбуждаемая источником заданного вида. Геометрия задачи проиллюстрирована на рисунке 12.1.

Требуется найти полное поле в произвольной точке. В качестве ограничений на получаемое решение используются граничные условия на поверхности тела (фактически это описание электрических свойств поверхности).

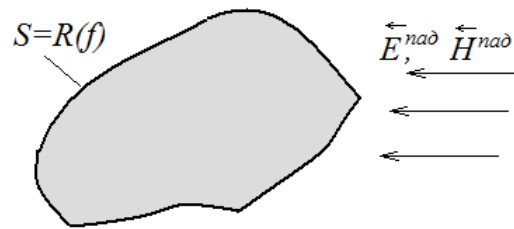


Рисунок 12.1 – Геометрия задачи дифракции электромагнитной волны на произвольном теле

При формулировке соотношений, описывающих поля, используют следующий подход. Выбор системы координат, в которой осуществляется запись решения, определяется удобством записи рассеянного (дифракционного) поля. Именно в данной системе координат и формулируется падающее поле.

12.2 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечном круглом цилиндре.

Рассмотрим получение точного решения для одной из канонических поверхностей – бесконечного круглого (кругового) цилиндра - с использованием метода разделения переменных.

Постановка задачи звучит следующим образом.

Пусть на бесконечный круговой цилиндр радиуса a падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении, перпендикулярном образующей цилиндра.

Требуется определить вторичное электромагнитное поле, возникающее в пространстве, при условии, что на поверхности выполняются граничные условия для идеально проводящего тела.

Решение будем искать в цилиндрической системе координат, ось Oz которой параллельна образующей цилиндра.

При решении поставленной задачи целесообразно рассматривать два случая поляризации падающей волны относительно оси Oz :

- вектор \vec{E} параллелен оси Oz ;
- вектор \vec{H} параллелен оси Oz .

Общий случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен суперпозицией данных типов полей. Так как методика решения обеих задач одинакова, ограничимся анализом только первого варианта. Геометрия задачи приведена на рисунке 12.2.

В соответствии с исходными данными проекции векторов поля падающей волны будут иметь вид:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(-ikr \cos \varphi), \quad H_z = 0. \quad (12.1)$$

Поперечные компоненты поля, как было показано при рассмотрении регулярных линий передачи электромагнитной энергии, могут быть получены на основе уравнений Максвелла через продольные составляющие поля.

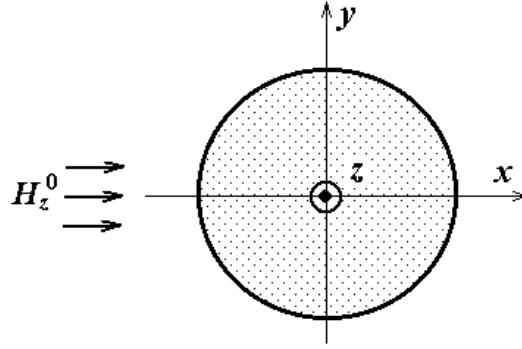


Рисунок 12.2 – Геометрия задачи дифракции E -поляризованной волны на круговом цилиндре

Строгое решение дифракционной задачи сводится к решению уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра и на бесконечности. В качестве граничных условий выступает требование непрерывности касательных к поверхности цилиндра составляющих векторов результирующего электромагнитного поля на поверхности цилиндра. На бесконечности вторичное поле должно удовлетворять принципу излучения (условиям Зоммерфельда).

Рассеянное поле удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \partial \left(\frac{r E_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 E_z^{pac} = 0. \quad (12.2)$$

Граничное условие для полного поля на поверхности определяется выражением

$$E_z^{пад} + E_z^{pac} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (12.3)$$

При использовании метода разделения переменных в виде произведения двух функций, зависящих только от r и только от φ

$$E_{zm}^{pac} = R_m(r) \Phi_m(\varphi), \quad (12.4)$$

уравнение (12.4) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial^2 R_m(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_m(r)}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m(r) = 0, \quad (12.5a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_m(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi_m(\varphi) = 0, \quad (12.5b)$$

где m – постоянная разделения.

Как известно, решение дифференциального уравнения (12.5б) имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi. \quad (12.6)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Представим падающее поле в виде известного из теории бесселевых функций разложения

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(ika \cos \varphi) = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m J_m(ka) \cos m\varphi, \quad (12.7)$$

в котором $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$ - числа Неймана; $J_m(\cdot)$ - функция Бесселя m -го

порядка.

С учетом того, что зависимость E_z в падающем поле в формуле (12.1) представляет собой четную функцию, то в соотношении (12.7) необходимо оставить только первое слагаемое и положить $C_2 = 0$. Число m должно быть целым, чтобы функция из (12.7) и ее производная были непрерывны во всей области $[0, 2\pi]$.

После того как определена целочисленность m , получаем, что (12.5а) есть уравнение для цилиндрической функции порядка m от аргумента kr . Общее решение данного уравнения, называемого *уравнением Бесселя*, имеет вид:

$$R_m(kr) = A'_m J_m(kr) + B'_m Y_m(kr), \quad (12.8a)$$

$$R_m(kr) = A_m H_m^{(1)}(kr) + B_m H_m^{(2)}(kr). \quad (12.8б)$$

В данных соотношениях $H_m^{(1)}(\cdot)$, $H_m^{(2)}(\cdot)$ - функции Ганкеля соответственно 1-го и 2-го рода m -го порядка, рассмотренные ранее при изучении цилиндрических волн и функции Грина; $Y_m(\cdot)$ - функция Неймана m -го порядка.

Для выбора решения используем условие излучения. В соответствии с данным условием искомое поле должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из рассмотрения асимптотических выражений для функций Ганкеля:

$$H_m^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right], \quad (12.9a)$$

$$H_m^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right], \quad (12.9б)$$

справедливых при больших значениях аргументов $|z| \gg 1$; $|z| \gg m$, следует, что слагаемое $B_m H_m^{(2)}(kr)$ из (12.8б) при $kr \rightarrow \infty$ соответствует волне, распространяющейся от источника (в данном случае цилиндра) на бесконечность, т.е. удовлетворяет условию излучения.

Таким образом, решение однородного уравнения Гельмгольца ищем в виде

$$E_z = E_z^{\text{пад}} + \sum_m B_m H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi. \quad (12.10)$$

Коэффициенты B_m можно найти из последнего неиспользованного условия задачи – граничного условия (12.3), которое приводит к простому функциональному уравнению:

$$E_z^{\text{пад}} \Big|_{r=a} + \sum_m B_m H_m^{(2)}(ka) \cos m\varphi = 0, \quad (12.11)$$

которое должно выполняться для всех φ . Функции $\cos m\varphi$ образуют полную ортогональную систему. С учетом последнего равенства из (12.11) получаем соотношение

$$B_m = -E_0 (-i)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (12.12)$$

С учетом вида коэффициента дифракции B_m продольная компонента E_z полного поля (12.10) может быть записана в виде:

$$E_z = -E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr). \quad (12.13)$$

Чтобы найти закон распределения тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем плоской волны, необходимо вычислить φ – компоненту вектора напряженности магнитного поля. Используя связь между продольными и поперечными компонентами поля, запишем сразу окончательное выражение:

$$H_\varphi = \frac{i}{kW_0} E_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr}, \quad (12.14)$$

где $W_0 = 120\pi$ Ом – волновое сопротивление свободного пространства.

Так как вектор плотности тока на поверхности цилиндра равен

$$\vec{j}_z = \left(\vec{H}^{\text{пад}} + \vec{H}^{\text{рас}} \right) \times \vec{n} = \vec{i}_z \left(H_\varphi^{\text{пад}} + H_\varphi^{\text{рас}} \right), \quad (12.15)$$

то, подставляя в данное соотношение формулу (12.14), можно записать:

$$\vec{j}_z = \vec{i}_z \left(\frac{E_z^{\text{пад}} \cos \varphi}{W_0} + \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{J_m(ka) \cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} \right). \quad (12.16)$$

Учитывая представление падающего поля в ряд по функциям Бесселя, преобразуем данное соотношение к виду:

$$\vec{j}_z = \vec{i}_z \frac{E_0}{W_0} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \cos m\varphi \left(J'_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \frac{dH_m^{(2)}(kr)}{dr} \right). \quad (12.17)$$

Вынесем знаменатель за скобку, а к скобке применим определение вронскиана, учитывая, что ток ищется на поверхности цилиндра, т.е. $r = a$:

$$J'_m(ka) H_m^{(2)}(ka) - J_m(ka) \frac{dH_m^{(2)}(ka)}{da} = \frac{2}{i\pi ka}. \quad (12.18)$$

В результате получаем следующее выражение для продольной компоненты вектора плотности поверхностного электрического тока, возбуждаемого на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра поперечно-электрической электромагнитной волной, приходящей перпендикулярно образующей цилиндра:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (12.19)$$

Суммирование в формуле (12.19) проводится до значений m , близких к величине $2ka$.

Повторяя аналогичные рассуждения для второй поляризации и учитывая, что граничные условия в данном случае будут иметь вид:

$$\left. \frac{\partial(H_z^{\text{пад}} + H_z^{\text{рас}})}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (12.20)$$

запишем сразу уравнение для нахождения коэффициентов дифракции:

$$\left. \frac{\partial H_z^{\text{пад}}}{\partial r} \right|_{r=a} + \sum_m A_m \frac{\partial H_m^{(2)}(ka)}{\partial a} \cos m\varphi = 0. \quad (12.21)$$

Решая данное уравнение, получаем следующее выражение для коэффициента дифракции:

$$A_m = (-i)^m \frac{\frac{\partial J_m(ka)}{\partial a}}{\frac{\partial H_m^{(2)}(ka)}{\partial a}}. \quad (12.22)$$

Соотношение для возбуждаемого поверхностного тока при этом принимает вид:

$$j_\varphi = -\frac{2H_0}{i\pi ka} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \varepsilon_m \frac{\cos m\varphi}{H_m^{(2)'}(ka)}. \quad (12.23)$$

12.3 Дифракция электромагнитных волн на бесконечном идеально проводящем клине и полуплоскости

Задача о нахождении дифракционного поля на клине, как и рассмотренная на предыдущей лекции задача дифракции на круговом цилиндре, относится к канонической. Получаемое решение имеет важное практическое применение, поскольку позволяет моделировать волновые процессы при наличии острых кромок и ребер, включая и края тонких экранов.

Для решения указанной задачи введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$ (рисунок 12.3) так, чтобы ось Oz была совмещена с ребром клина, а угол φ будем отсчитывать от освещенной грани.

Плоская однородная электромагнитная E -поляризованная волна падает с направления φ_0 . В данном случае задача не обладает аксиальной симметри-

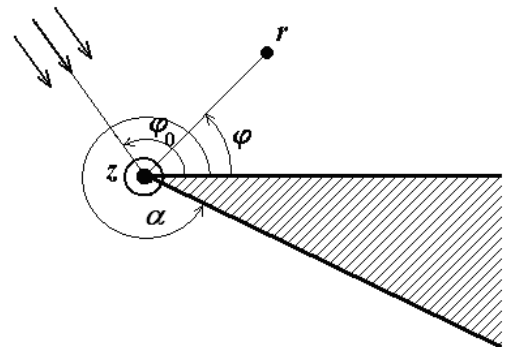


Рисунок 12.3 – Геометрия задачи дифракции на клине

Электродинамика и распространение радиоволн

ей, поэтому падающее поле на основе теории плоских волн может быть записано в виде

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (12.24)$$

Граничные условия для идеально проводящего клина могут быть записаны следующим образом:

$$E_z = 0 \Big|_{\varphi = 0, \alpha}. \quad (12.25)$$

При таких граничных условиях решения уравнений для функции $\Phi_m(\varphi)$ и $R_m(r)$ имеют вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \sin \frac{\pi m}{\alpha} \varphi, \quad (12.26) \quad R_m(r) = H_{\pi m/\alpha}^{(2)}(kr). \quad (12.27)$$

Таким образом, решение однородного уравнения Гельмгольца ищем в следующей форме:

$$E_z = E_z^{\text{пад}} + \sum_m C_m \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right). \quad (12.28)$$

Методика определения коэффициентов C_m та же, что и для кругового цилиндра. В связи с этим запишем сразу окончательное выражение для полного поля

$$E_z = E_0 \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha} \right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right). \quad (12.29)$$

В случае падения плоской однородной H -поляризованной волны алгоритм решения не меняется, а граничные условия приобретают вид:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi = 0, \alpha} = 0. \quad (12.30)$$

Решение дифференциального уравнения, записанного относительно функции $\Phi_m(\varphi)$, имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right), \quad (12.31)$$

а представление решения задачи дифракции определяется зависимостью

$$H_z = \frac{1}{2} \frac{E_0}{W} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \exp \left(-i \frac{\pi^2 m}{2\alpha} \right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \cos \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi \right) \cos \left(\frac{\pi m}{\alpha} \varphi_0 \right). \quad (12.32)$$

Для анализа структуры полей с использованием геометрической теории дифракции перепишем равенства (12.29) и (12.32) следующим образом:

$$H_z = \frac{E_0}{W} \{ u(r, \varphi - \varphi_0) \mp u(r, \varphi + \varphi_0) \}, \quad (12.33)$$

$$\text{где } u(r, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_m \exp \left(i \frac{\pi^2 m}{2\alpha} \right) J_{\pi m/\alpha}(kr) \cos \left(\frac{\pi m}{\alpha} \psi \right), \quad \psi = \varphi \pm \varphi_0.$$

Электродинамика и распространение радиоволн

Верхний знак в формуле (12.33) соответствует случаю дифракции плоской E -поляризованной волны, нижний – H -поляризованной.

Функцию $u(r, \psi)$ можно представить в виде

$$u(r, \psi) = S(r, \psi) + \begin{cases} \exp(ikr \cos \psi) & \text{при } -\pi < \psi < \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < \psi < 2\alpha - \pi, \\ \exp(ikr \cos(2\alpha - \psi)) & \text{при } 2\alpha - \pi < \psi < 2\alpha. \end{cases} \quad (12.34)$$

Первое слагаемое – негеометрооптическая составляющая, второе слагаемое – геометрооптическая составляющая. Поясним смысл второго слагаемого. Если бы волна отражалась от грани, как от бесконечной плоскости, то пространство разделилось бы лучами $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = \pi + \varphi_0$ на области (рисунок 12.4):

- освещенную прямыми и отраженными лучами (I),
- освещенную только прямыми лучами (II),
- тень (III).

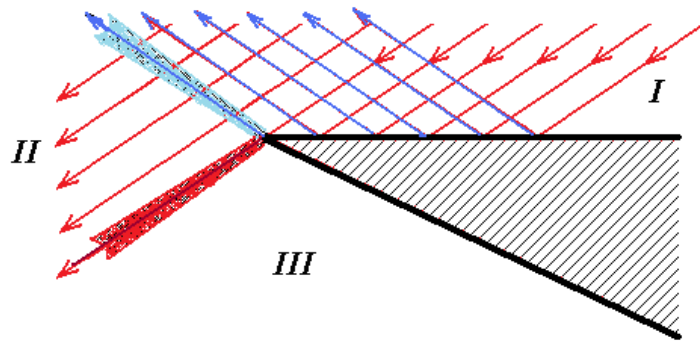


Рисунок 12.4 – Создаваемые области в задаче дифракции волны на клине

Таким образом, приходим к описанию поля с помощью геометрооптической и негеометрооптической составляющих. Направление $\pi - \varphi_0$ соответствует направлению распространения отраженной по закону Снеллиуса волны. Наличие ребра приводит к появлению негеометрооптической составляющей в полном поле.

Вдали от границ свет-тень $\varphi = \pi - \varphi_0$ и $\varphi = \pi + \varphi_0$ негеометрическая часть поля представляет собой знакомые цилиндрические волны. Зависимость, описывающая такую волну, в данном случае имеет вид:

$$S(r, \psi) = \frac{\sin\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) \frac{\pi}{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi^2}{\alpha}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \psi\right)} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (12.35)$$

Однако в отличие от ненаправленной цилиндрической волны негеометрооптическая часть поля характеризуется определенной диаграммой направленности. Ее диаграмма направленности определяется первым множителем. Существуют и физические различия в процессе излучения. Так, нить электрического (магнит-

Электродинамика и распространение радиоволн

ного) тока является сторонним источником, а ребро клина переизлучает, представляя собой *рассеивающий центр*.

Частным случаем задачи дифракции электромагнитной волны на клине является случай бесконечной плоскости, в которую превращается клин при угле раскрытия $\alpha=\pi$. Как следует из рисунка 12.4, при этом остается только область, освещаемая прямой и отраженной волнами (область I), а области II и III исчезают. Формула (12.35) при этом принимает вид:

$$S(r, \psi) = -\frac{\sin \pi}{1 + \cos \varphi} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \frac{\exp(-ikr)}{r}. \quad (12.36)$$

Поскольку знаменатель первого сомножителя в (12.36) не может обратиться в нуль, так как $0 < \varphi_0 < \pi$ и $0 < \varphi < \pi$ и, следовательно, $\varphi \pm \varphi_0 \neq \pi$, то деления нуль на нуль в первом сомножителе не возникает, следовательно, при $\alpha=\pi$ получаем $S(r, \psi) \equiv 0$. С учетом этого из формулы (12.29) получаем, что поведение продольной компоненты поля определяется зависимостью

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 \{ \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] - \exp[ikr \cos(\varphi + \varphi_0)] \} \equiv \\ &\equiv E_0 \exp(iky \cos \varphi) \sin(kx \sin \varphi) \end{aligned} \quad (12.37)$$

для *E*-поляризованной волны и

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{E_0}{W} \{ \exp[ikr \cos(\varphi - \varphi_0)] + \exp[ikr \cos(\varphi + \varphi_0)] \} \equiv \\ &\equiv \frac{E_0}{W} \exp(iky \cos \varphi) \cos(kx \sin \varphi) \end{aligned} \quad (12.38)$$

для *H*-поляризованной волны. Несложно заметить, что данные формулы совпадают с результатами, полученными для случаев падения волн вертикальной и горизонтальной поляризации на идеально проводящую плоскость.

Другим предельным случаем является исследование дифракции плоской волны на полуплоскости. Решение задачи при этом получается из (12.35), если положить $\alpha=2\pi$:

$$S(r, \psi) = \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \exp(-ikr)}{\sqrt{2\pi kr} 2 \cos \frac{\psi}{2}}. \quad (12.39)$$

Проанализируем структуру поля вдали от ребра при дифракции на идеально проводящем клине.

Проще всего вид поля в области III, в которой геометрическая часть равна нулю. Полное поле совпадает с негеометрическим – это цилиндрические волны, как бы расходящиеся от ребра; однако реального источника на ребре, как уже отмечалось выше, нет. В области II эти цилиндрические волны накладываются на падающую плоскую волну, возникают интерференционные полосы – неглубокие осцилляции, уменьшающиеся при удалении от границы между областями. Сложнее поле в области I: здесь, кроме падающей волны, существует и отраженная плоская волна. Возникают стоячие волны, интерферирующие с цилиндрической волной.

Вблизи границы свет-тень (области полутени) распределение поля имеет значительно более сложный характер. Здесь поле быстро изменяется в поперечном направлении. На границе свет-тень оно равно половине поля падающей волны. Таким образом, дифракционные явления на ребре клина, если под этим понимать отклонение поля от геометрического, более всего проявляются в зоне полутени.

На границе между областями I и II поле несколько сложнее. В обеих областях присутствует поле падающей волны, но отраженная по законам геометрической оптики волна есть только в области I, а в области II ее нет. Поэтому луч $\varphi = \pi - \varphi_0$ есть граница свет-тень для отраженной волны. На этой границе выделяется полутеневая зона, в которой происходит интерференция между полутеневым полем и плоской падающей волной.

12.4 Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящей сфере

Перейдем к решению задачи дифракции плоской волны на идеально проводящем шаре радиуса a , с центром которой совмещено начало сферической системы координат (рисунок 12.5).

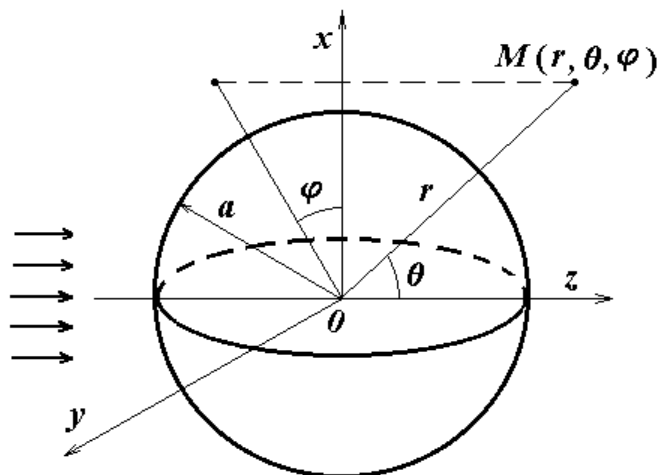


Рисунок 12.5 – Геометрия задачи дифракции волны на сфере

Пусть на сферу падает плоская электромагнитная волна, составляющие векторов напряженности \vec{E} и \vec{H} во фронте которой определяются зависимостью

$$\vec{E}^{\text{пад}} = \vec{x}_0 E_0 \exp(-ikz), \quad \vec{H}^{\text{пад}} = -\vec{y}_0 \frac{E_0}{W} \exp(-ikz). \quad (12.40)$$

Полное поле при дифракции представим, как и для кругового цилиндра, в виде суммы падающего $\vec{E}^{\text{пад}}$, $\vec{H}^{\text{пад}}$ и рассеянного $\vec{E}^{\text{рас}}$, $\vec{H}^{\text{рас}}$ полей. Для записи полей используются вспомогательные функции *потенциалы Дебая* - U и V . Функции U и V соответствуют двум поляризациям следующим образом: поле с $U \neq 0, V = 0$ не содержит H_r компоненты, т.е. является поперечно-магнитной

Электродинамика и распространение радиоволн

(электрической) волной; поле с $U = 0, V \neq 0$ не содержит E_r составляющую, т.е. является поперечно-электрической (магнитной) волной. Единицы измерения функций U и V соответственно [В] и [А], т.е. по своему физическому смыслу являются напряжением и силой тока.

Потенциалы Дебая рассеянного поля удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta U^{pac} + k^2 U^{pac} = 0, \quad \Delta V^{pac} + k^2 V^{pac} = 0. \quad (12.41)$$

Граничные условия с учетом выражений для потенциалов Дебая принимают вид

$$\left. \frac{\partial(rU)}{\partial r} = \frac{\partial(rU^{пад})}{\partial r} + \frac{\partial(rU^{pac})}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. V = V^{пад} + V^{pac} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.42)$$

Анализ соотношений (12.41), (12.42) показывает, что ни уравнения Гельмгольца, ни граничные условия не связывают между собой поляризации, т.е. волны электрического и магнитного типов при дифракции на сфере могут существовать независимо.

Решение уравнений методом разделения переменных имеет вид:

$$U^{pac} = \sum_n \sum_m A_{nm} R_n(r) \Theta_{nm}(\theta) \Phi_m(\varphi), \quad V^{pac} = \sum_n \sum_m B_{nm} R_n(r) \Theta_{nm}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (12.43)$$

где

$$\Phi_m(\varphi) = \exp(im\varphi), \quad \Theta_{nm}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad R_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr), \quad (12.44)$$

P_n^m - присоединенные функции Лежандра степени n порядка m .

Функции P_n^m при $|m| > n$ тождественно равны нулю. В совокупности с тригонометрическими функциями функции Лежандра называются следующим образом: если $|m| < n$, то называются *шаровыми тессеральными*, т.е. *клеточными функциями*, при $|m| = n$ - *шаровыми телесными функциями*.

Связь между полученным решением для потенциалов Дебая и компонентами электромагнитного поля определяется соотношениями:

$$\cos\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \left(r \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = E_r, \quad (12.45a)$$

$$\cos\varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{ik}{\sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} = E_\theta, \quad (12.45б)$$

$$-\sin\varphi \left\{ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - ik \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right\} = E_\varphi, \quad (12.45в)$$

$$-\sin\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \left(r \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = H_r, \quad (12.45г)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

$$\sin \varphi \left\{ \frac{ik}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) \right\} = H_{\theta}, \quad (12.45д)$$

$$\cos \varphi \left\{ ik \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} = H_{\varphi}. \quad (12.45е)$$

Проанализируем структуру рассеянного поля. Элементарные волны, из которых складывается поле дифракции, представляют собой сферические волны, как бы излучаемые из центра сферы. Здесь можно провести полную аналогию с цилиндрическими волнами, как бы излучаемыми из центра цилиндра в задаче о дифракции электромагнитной волны на круговом цилиндре. Амплитуда поля каждой волны зависит от углов θ и φ . Если мысленно на сфере бесконечно большого радиуса с центром в точке O затемнить места с максимальной плотностью излучения, то сфера покроется пятнами (проявится клеточная структура). Именно это и дало название *шаровым тессеральным функциям*.

Соотношение между потенциалами U и V в падающей и дифрагированной волнах отличается. Это приводит к тому, что в терминах полей \vec{E} и \vec{H} происходит *деполяризация*, т.е. в дифрагированном поле появляются составляющие, которых не было в падающей волне. Однако в терминах потенциалов Дебая деполяризации не происходит, т.е., если в падающей волне $U \neq 0$, $V = 0$, то и в рассеянном поле $V = 0$, и наоборот.

Поле дифракции на идеально проводящей сфере содержит все шесть компонент и имеет в дальней зоне характер квазиплоской поперечной волны.

Сравнение с данными, приведенными для кругового цилиндра, показывает, что между диаграммами рассеянного поля на цилиндре и сфере существует значительное различие.

Во-первых, рассеиваемая на цилиндре волна поляризована так же, как и падающая. Это объясняется тем, что геометрические параметры цилиндра вдоль образующей не изменяются, возбуждаемые при этом электрические токи являются либо продольными при дифракции E -поляризованной волны, либо поперечными при дифракции H -поляризованной волны. В случае дифракции плоской волны на сфере распределение токов является векторным, поскольку одновременно существуют как меридиональные, так и азимутальные составляющие последних. Это и определяет тот факт, что поле дифракции плоской волны на сфере является векторным.

Во-вторых, различный закон изменения геометрических параметров поверхности в перпендикулярном плоскости сечения направлении приводит к отличию и собственно диаграммы направленности рассеянных на цилиндре и сфере полей. Однако по мере увеличения радиуса цилиндра и сферы различие между E_{θ} - и E_{φ} -компонентой диаграммы направленности полей, рассеянных сферой, а также их отличие от диаграммы направленности рассеяния плоской волны на цилиндре уменьшается.

Тема 6. Основные понятия процессов распространения электромагнитных волн

Лекция N 13. Распространение волн в свободном пространстве

13.1 Понятие радиолинии первая и вторая модели радиотрасс

Говоря об электромагнитных волнах, используемых в радиотехнике, употребляют термин радиоволны. Все этапы сложного процесса - от формирования сложного радиосигнала в пункте передачи информации до ее воспроизведения в пункте приема – реализуются в так называемом радиоканале (рисунок 13.1).



Рисунок 13.1 – Структура радиоканала

Данный канал образуют радиопередатчик и радиоприемник, связанные между собой радиолинией. Под радиолинией обычно понимают совокупность передающей и приемной антенн, а также естественной среды (естественной трассы распространения радиоволн), расположенной между антеннами и оказывающей существенное влияние на распространение радиоволн. Включение в состав радиолинии антенн оправдано тем, что свойства трассы зависят от направленности антенн и их ориентации.

Электромагнитные волны распространяются в приповерхностных толщах Земли, атмосфере или космическом пространстве. Параметры естественной среды зависят от частоты электромагнитного поля, температуры, влажности почвы, времени суток и года и т.д. Под влиянием среды в распространяющемся электромагнитном поле по сравнению со свободным пространством изменяются амплитуда, фаза, групповая и фазовая скорости, направление распространения, поляризационные характеристики.

В связи с этим при расчете радиолиний должны быть решены следующие основные задачи:

- 1) рассчитаны напряженности электрического (магнитного) полей или мощности на входе радиоприемного устройства при заданной мощности излучения (мощности радиопередающего устройства);
- 2) рассчитана необходимая мощность излучения для обеспечения заданных значений напряженности электромагнитного поля или мощности на входе радиоприемного устройства;
- 3) выбрана оптимальная длина волны;

Электродинамика и распространение радиоволн

4) определена скорость распространения и направление прихода электромагнитной волны;

5) изучены поляризационные характеристики и возможные искажения сигнала.

Несложно заметить, что для многообразия видов трасс построить единую модель, позволяющую описать свойства электромагнитного поля при распространении, весьма затруднительно. В связи с этим модели разрабатываются для каждой конкретной радиотрассы, учитывая основные факторы, оказывающие воздействие на распространяющееся электромагнитное поле.

При этом электромагнитное поле рассматривается в дальней зоне излучателя. В зависимости от высоты распространения радиоволн вводятся следующие понятия.

Радиоволны, распространяющиеся на малом электрическом расстоянии от Земли, называются земными.

На их характеристики влияют электрические параметры (ε_a, σ) приповерхностных слоев Земли, сферичность Земли и отклонения от сферичности (гладкости), параметры атмосферы. Поскольку модели радиотрасс оказываются весьма сложными, то вводят две степени их приближения. Так, модели первого приближения не учитывают влияние атмосферы и сферичности Земли. Модели второго приближения последовательно учитывают сначала сферичности Земли, а затем и отличие реальной атмосферы от свободного пространства.

К радиоволнам относят электромагнитные колебания, длина волны которых лежит в пределах от $2 \cdot 10^{-9}$ до 10^5 м, что соответствует частотам колебаний от $15 \cdot 10^{10}$ до $3 \cdot 10^{-3}$ МГц. В соответствии с рекомендациями Международного консультативного комитета по радио (МККР) принят десятичный принцип классификации радиоволн. Радиочастоты в соответствии с международным регламентом радиосвязи делятся на 9 диапазонов, обозначаемые номерами от 4 до 12. Диапазон с номером N ограничен снизу частотой $0,3 \cdot 10^N$ Гц и сверху частотой $3 \cdot 10^N$ Гц. Диапазонам присвоены следующие названия:

№ 4 – $f_4 = 0,3 \cdot 10^4 \div 3 \cdot 10^4 = 3 \div 30$ кГц – сверхдлинные волны;

№ 5 – $f_5 = 0,3 \cdot 10^5 = 30 \div 300$ кГц – длинные волны;

№ 6 – $f_6 = 0,3 \cdot 10^6 = 300 \div 3000$ кГц – средние волны;

№ 7 – $f_7 = 0,3 \cdot 10^7 = 3 \div 30$ МГц – короткие волны;

№ 8 – $f_8 = 0,3 \cdot 10^8 = 30 \div 3000$ МГц – метровые волны;

№ 9 – $f_9 = 0,3 \cdot 10^9 = 300 \div 3000$ МГц – дециметровые волны;

№ 10 – $f_{10} = 0,3 \cdot 10^{10} = 3 \div 30$ ГГц – сантиметровые волны;

№ 11 – $f_{11} = 0,3 \cdot 10^{11} = 30 \div 300$ ГГц – миллиметровые волны;

№ 12 – $f_{12} = 0,3 \cdot 10^{12} = 300 \div 3000$ ГГц – децимиллиметровые волны.

Следует учитывать, что на границах диапазонов нет резкого отличия в особенностях распространения радиоволн.

13.2 Модель свободного пространства

Простейшей математической моделью является модель свободного пространства. Энергетический расчёт радиолиний предполагает определение напряжённости поля в точке приёма при известных параметрах передатчика и его антенны. При теоретическом рассмотрении этого вопроса обычно среду распространения радиоволн полагают в виде однородного непоглощающего безграничного пространства, в котором отсутствуют атомы, молекулы, свободные заряды. Такое пространство принято называть свободным. Относительные диэлектрическая (ε) и магнитная (μ) проницаемости его равны единице, волновое сопротив-

ление $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ Ом. В реальных природных условиях такой среды не

существует, но исследование условий распространения радиоволн в свободном пространстве позволяет выявить фундаментальные закономерности распространения, связанные со сферичностью фронта волны. Учёт же особенностей реальных трасс осуществляется введением в выражения для свободного пространства специальных множителей.

Для оценки коэффициента передачи между передающей и приёмной антеннами вводят понятие идеальной радиолинии, определяют коэффициент передачи в идеальной радиолинии (так называемые «потери идеальной радиолинии») и затем учитывают дополнительные потери в реальной радиолинии («множитель ослабления»).

Под идеальной радиолинией понимают радиолинию, проходящую в свободном пространстве.

Пусть ненаправленная антенна излучает в свободном пространстве мощность P . На расстоянии R от неё средняя за период плотность потока мощности равна

$$\Pi = \frac{P}{4\pi R^2}. \quad (13.1)$$

Направление потока мощности совпадает с направлением распространения радиоволны и является, следовательно, вектором Пойнтинга. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$, как уже не раз отмечалось, является векторным произведением напряжённости электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей. Поскольку в дальней зоне в окрестности точки наблюдения поле излучателя является плоским, то данные векторы взаимно перпендикулярны, следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2} E_m^u H_m^u = \frac{1}{2} \frac{(E_m^u)^2}{120\pi} \quad [\text{Вт/м}^2], \quad (13.2)$$

где E_m^u и H_m^u - амплитуды векторов напряженностей электрического и магнитного поля в точке приема. Верхний индекс “и” подчеркивает, что речь идет об идеальной радиолинии.

Электродинамика и распространение радиоволн

Приравнявая (13.1) и (13.2), определим значение амплитуды напряженности электрического поля на расстоянии R от изотропного излучателя в идеальной радиолинии:

$$E_m^u = \frac{\sqrt{60P}}{R} \text{ [Вт/м]}. \quad (13.3)$$

Реальные антенны излучают неизотропно. Степень направленности излучателя антенны характеризует коэффициент направленного действия (КНД). КНД антенны (D) показывает, во сколько раз плотность потока мощности, создаваемая направленной антенной в направлении максимального излучения, больше плотности потока мощности, создаваемого в этом же направлении (на одинаковом расстоянии) изотропной (ненаправленной) антенной.

Плотность потока мощности, создаваемая направленной антенной в этом случае, равна

$$\Pi = \frac{PD}{4\pi R^2}, \quad (13.4)$$

а амплитуда вектора напряжённости электрического поля

$$E_m^u = \frac{\sqrt{60PD}}{R}. \quad (13.5)$$

Мощность принятого антенной в идеальной радиолинии сигнала (P_{np}^u) связана с эффективной площадью приемной антенны соотношением

$$P_{np}^u = \Pi \cdot S_{эфф}. \quad (13.6)$$

Последняя же может быть выражена через КНД приемной антенны D_{np}

$$S_{эфф} = \frac{D_{np} \cdot \lambda^2}{4\pi}. \quad (13.7)$$

Подставляя (13.7) и (13.4) в (13.6), получим

$$P_{np}^u = P \frac{D \cdot D_{np} \lambda^2}{16\pi^2 R^2}. \quad (13.8)$$

Потери мощности при распространении радиоволн в свободном пространстве, определяемые как отношение мощности сигнала на входе приёмника к мощности, излучаемой передающей антенной, при ненаправленных антеннах ($D=D_{np}=1$) называются основными потерями радиолинии (или потерями идеальной радиолинии) и определяются из (13.8)

$$L_{nom}^u = \frac{P_{np}^u}{P} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 = \left(\frac{c}{4\pi R f} \right)^2 \quad (13.9)$$

или, в децибелах,

$$L_{nom}^u = 10 \lg \frac{P_{np}^u}{P} = 20 \left(\lg \frac{c}{4\pi} - \lg R - \lg f \right). \quad (13.10)$$

Принимая в (13.10) частоту f в мегагерцах, а расстояние R в километрах, получим

$$L_{nom}^u = -[32,5 + 20 \lg R + 20 \lg f] \text{ [дБ]}. \quad (13.11)$$

Заметим, что более точно отражает суть дела термин «коэффициент передачи по мощности в радиолинии».

13.3 Множитель влияния среды. Замирания

Реальные радиолинии отличаются от идеальной наличием разнообразных факторов, приводящих к уменьшению мощности принятого антенной сигнала. Для оценки влияния упомянутых факторов пользуются понятием множителя ослабления V , который равен отношению напряженности поля E_m на некотором расстоянии от передающей антенны в реальной радиолинии к полю в идеальной радиолинии

$$V = E_m / E_m^u. \quad (13.12)$$

Очевидно, $0 \leq V \leq 1$.

Мощность, принятая антенной в реальной радиолинии, может быть выражена следующим образом:

$$P_{np} = P_{np}^u \cdot V^2. \quad (13.13)$$

Потери в реальной радиолинии можно представить в виде

$$L_{nom} = P_{np} / P = \frac{P_{np}^u}{P} \cdot V^2 = L_{nom}^u \cdot V^2. \quad (13.14)$$

Строго коэффициент ослабления V можно определить, решая граничную задачу дифракции электромагнитного поля на неоднородном импедансном шаре (Земле), покрытом неоднородной атмосферой. Однако из-за сложности решения такой задачи при расчетах применяют упрощенные модели расчета данного коэффициента.

При распространении радиоволн в естественных условиях параметры среды (тропосферы, ионосферы) могут меняться случайным образом, т.е. флуктуировать. Флуктуации амплитуды сигнала называют замираниями (федингами). Квазипериод флуктуаций составляет от долей секунды до десятков минут. Пример флуктуаций показан на рисунке 13.2.

При описании флуктуаций используют понятие уровня сигнала, обычно измеряемая в децибеллах:

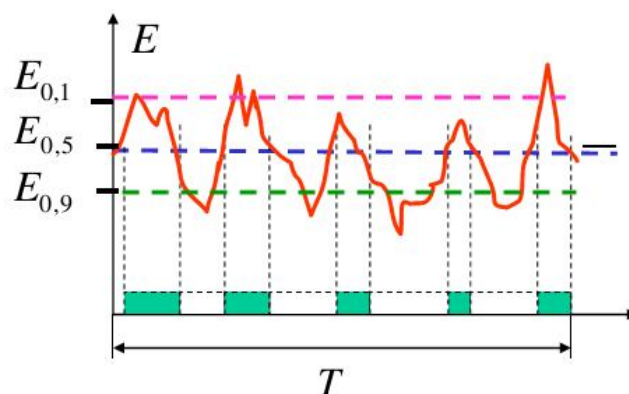


Рисунок 13.2 – Пример флуктуаций амплитуды сигнала во времени

$$E_{\partial B} = 20 \lg \frac{E_{\text{мкВ}} / \text{м}}{1_{\text{мкВ}} / \text{м}}. \quad (13.15)$$

При этом различают:

$E_{0,9}$ - уровень, превышаемый в течение 90% времени;

$E_{0,5}$ - уровень, превышаемый в течение 50% времени (медианный уровень);

$E_{0,1}$ - уровень, превышаемый в течение 10% времени;

Глубина замираний при таком подходе оценивается формулой $(E_{0,1} - E_{0,9})$.

Глубокие замирания (ниже порога чувствительности приемника) приводят к искажениям или потере полезного сигнала, т.е. нарушают устойчивость работы радиолинии.

Замирания бывают плоские, т.е. равномерные по всей полосе частот, и селективные, т.е. проявляющиеся на части частотного спектра.

Множитель влияния среды рассматривается как сложная функция большого числа случайных аргументов. Для моделирования замираний используется аппарат теории вероятностей.

С приемлемой для практики точностью в течение ограниченных интервалов времени замирания можно считать стационарным случайным процессом. Для каждого вида радиотрассы и длины радиоволны длительность этих интервалов времени определяется экспериментально. Замирания в течение такого ограниченного интервала времени называют быстрыми замираниями, а изменение средних значений уровня за большие интервалы времени – медленными замираниями.

Причины появления замираний

1. Многолучевое распространение радиоволн – самый распространенный фактор возникновения замираний. При этом распространение радиоволн до точки приема осуществляется по разным траекториям. В результате в точке приема наблюдается многолучевая структура поля, которая приводит к интерференционным замираниям, когда на входе приемника после сложения сигналов с разными фазами наблюдается их взаимная компенсация и как следствие - падение уровня полезного сигнала. Такие замирания обычно имеют место в диапазонах СЧ, ВЧ, ОВЧ, УВЧ, СВЧ, КВЧ.

Отражения сигнала может произойти на границе раздела теплых и холодных слоев воздуха с различной влажностью (атмосферный волновод), на границе раздела с земной или водной поверхностью, наличием горной вершины (усиление препятствием).

2. Случайные изменения условий ослабления сигнала на трассе из-за экранирующего действия Земли, которое меняется в зависимости от метеоусловий. Такие замирания обычно имеют место в диапазонах УВЧ, СВЧ, КВЧ.

3. Случайные изменения поляризации принимаемого поля. При этом возникает рассогласование поляризации приемной антенны и принимаемого поля. Такие замирания называются поляризационными. Они обычно проявляются в диапазонах УВЧ, СВЧ, КВЧ.

Электродинамика и распространение радиоволн

При передаче радиосигналов в городе полные потери могут быть оценены с использованием модели медианных потерь передачи Окамуры-Хаты:

$$L_0 = 69,55 + 26,16 \lg f - 13,82 \lg h_1 + (44,9 - 6,55 \lg h_1) \lg r + \alpha(h_2) - G_1 - G_2. \quad (5.16)$$

В данном соотношении:

$$\alpha(h_2) = (9,7 - 1,1 \lg f) h_2 + 1,56 \lg f - 0,8, \quad (13.17)$$

f [МГц] – частота радиосвязи;

r [км] – расстояние между антеннами;

h_1, h_2 [м] – высота передающей и приемной антенн.

Полные потери передачи в пригороде составляют:

$$L = L_0 - 2 \left(\lg \left(\frac{f}{28} \right) \right)^2 - 5,4 \text{ дБ}. \quad (13.18)$$

На полуоткрытое местности (сельские участки) полные потери определяются с использованием формулы:

$$L = L_0 - 4,78 (\lg f)^2 + 18,33 \lg f - 35,94 \text{ дБ}. \quad (13.19)$$

На открытой местности (сельские участки) полные потери вычисляются по формуле:

$$L = L_0 - 4,78 (\lg f)^2 + 18,33 \lg f - 40,94 \text{ дБ}. \quad (13.20)$$

В районах с плотной застройкой ($b = 3..50\%$)

$$\alpha(b) = 25 \lg b - 30, \text{ дБ}. \quad (13.21)$$

Напряженность поля и мощность принимаемого сигнала в соответствии с моделью Окамуры-Хаты рассчитывается с использованием соотношений:

$$E = 107,17 - 101 \lg(PG) + 20 \lg f - L, \text{ дБ/мкВ/м}, \quad (13.22)$$

$$P_c = (P_\Sigma - 46) - 53,8 - 38,4 \lg r + 20 \lg \left(\frac{h_1}{30} \right) + 10 \lg \left(\frac{h_2}{3} \right) + G_2, \text{ дБ/мВт} \quad (13.23)$$

$$P_\Sigma = P_{II} + G_1 + \eta_{A\Phi T}, \text{ дБ/мВт}. \quad (13.24)$$

Лекция N 14. Распространение радиоволн над земной поверхностью

14.1 Расстояние прямой видимости

В большинстве случаев приемные и передающие антенны размещаются на таких расстояниях от земной поверхности, при которых необходимо учитывать ее влияние на распространение радиоволн. Электрическое поле в месте приема таких антенн можно представить как совокупность первичного поля, соответствующего полю излучателя в неограниченной однородной среде при отсутствии земной поверхности, и вторичного поля, обусловленного общим влиянием земли на процессы распространения радиоволн. Решение задачи о нахождении напряженности электрического поля в некоторой точке над земной поверхностью будем

Электродинамика и распространение радиоволн

проводить на основе построения модели, не учитывающей влияние атмосферы. Практически все радиотрассы, использующие земные радиоволны, можно свести к двум основным моделям:

- передающая или приемная антенны или вместе подняты высоко (полрядка нескольких длин волн) над поверхностью Земли, что выполняется обычно на волнах короче 20-30м (КВ и УКВ);
- обе антенны расположены в непосредственной близости от поверхности Земли, как это имеет место в диапазонах гектометровых и километровых волн.

Ориентировочной оценкой возможности прямолинейного распространения радиоволн служит расстояние прямой видимости. *Расстоянием прямой видимости* называется расстояние между передающей и приемной антеннами, при котором прямая линия, соединяющая эти антенны, касается земной поверхности. Из рисунка 14.1 расстояние прямой видимости можно определить соотношением

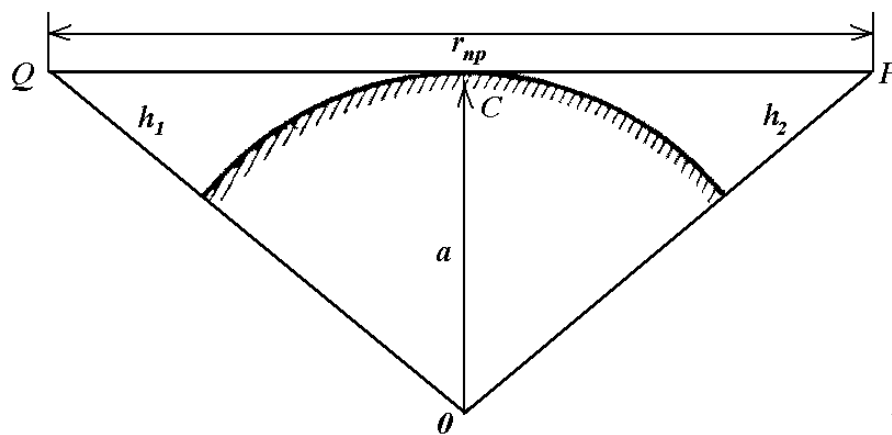


Рисунок 14.1 – К определению расстояния прямой видимости

$$R_0[\text{км}] = 3.57(\sqrt{h_1[\text{М}]} + \sqrt{h_2[\text{М}]}), \quad (14.1)$$

где h_1, h_2 - соответственно высоты (в м) поднятия первой и второй антенн.

В зависимости от соотношения между протяженностью радиотрассы R и расстоянием прямой видимости R_0 (при тех же высотах расположения антенн) следует выбирать одну из трех моделей трассы:

- при малой протяженности трассы ($R < 0.2R_0$) поверхность Земли можно будет считать плоской;
- при $0.2 < R_0 < 0.8R_0$ необходимо учитывать влияние сферичности земли;
- при $R > 0.8R_0$ расчет следует вести с учетом дифракции.

Область, лежащая на расстоянии $0.8R_0 < R < 1.2R_0$, называется *областью полутени (область II)*, а при $R > 1.2R_0$ начинается *область тени (область III)*, как показано на рисунке 14.2. Область I получила название освещенной зоны.

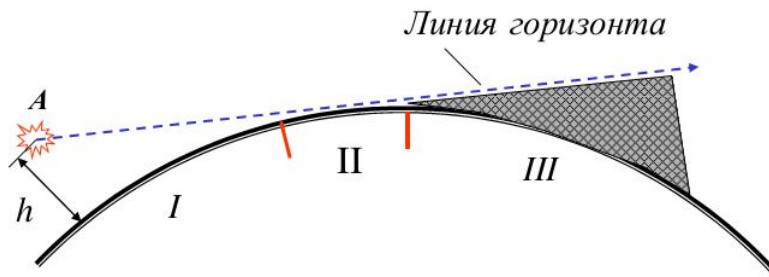


Рисунок 14.2 – Пояснение областей освещенности

В случае, когда антенна расположена непосредственно на поверхности Земли ($h_1 = h_2 = 0$), понятие расстояния прямой видимости не имеет смысла (см. рисунок 14.1). Моделью плоской Земли можно пользоваться и при низко расположенных антеннах в метровом диапазоне волн для радиотрасс протяженностью 10-20 км, на дециметровых волнах – протяженностью до нескольких десятков километров, на средних и длинных волнах – до нескольких сотен километров.

14.2 Область, существенная для прохождения радиоволн. Зоны Френеля

Помещенная в свободном пространстве изотропная антенна излучает энергию во всех направлениях, а, следовательно, во всех точках окружающего пространства (не на очень больших удалениях от излучателя) плотность потока энергии имеет конечное значение. Рассмотрим способ передачи энергии радиоволны в точку P , находящуюся на удалении r от источника, расположенного в точке Q (см. рисунок 14.3).

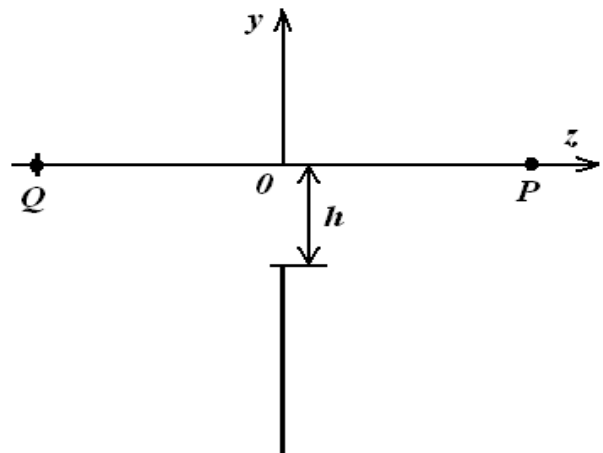


Рисунок 14.3 – Геометрия задачи нахождения области, существенной для распространения радиоволн

При этом можно предположить, что, во-первых, энергия радиоволны распространяется по тоненькой ниточке – лучу QP (в свете понятий геометрической оптики). Во-вторых, попадающая в точку Q энергия волны распространяется по определенному, притом конечному объему в пространстве вокруг оси QP .

Вопрос о форме пространства, эффективно участвующего в передаче энергии, допускает и аналитическое решение на основе принципа Гюйгенса и представлений о зонах Френеля.

С использованием принципа Гюйгенса проведем из точки Q , как из центра, сферу радиуса z_0 , которая будет представлять собой поверхность фронта волны

Электродинамика и распространение радиоволн

(рисунок 14.4,а). Из точки приема P проведем семейство прямых, пересекающих сферу S в точках, удаленных от точки P на расстояние $(r - z_0) + 0.5\lambda$. Это семейство образует коническую поверхность, пересекающую плоскость рисунка по прямым PN_1 и PN'_1 . Пересечения конических поверхностей радиусом $PN_n(r - z_0) + 0.5n\lambda$ со сферой образуют систему концентрических окружностей. Вид на эти окружности со стороны точки P показан на рисунок 4. Участки, заключенные между соседними окружностями, получили название *зон Френеля*. Первая зона Френеля представляет собой часть сферы, ограниченную окружностью, а зоны высших порядков – кольцевые области на поверхности сферы.

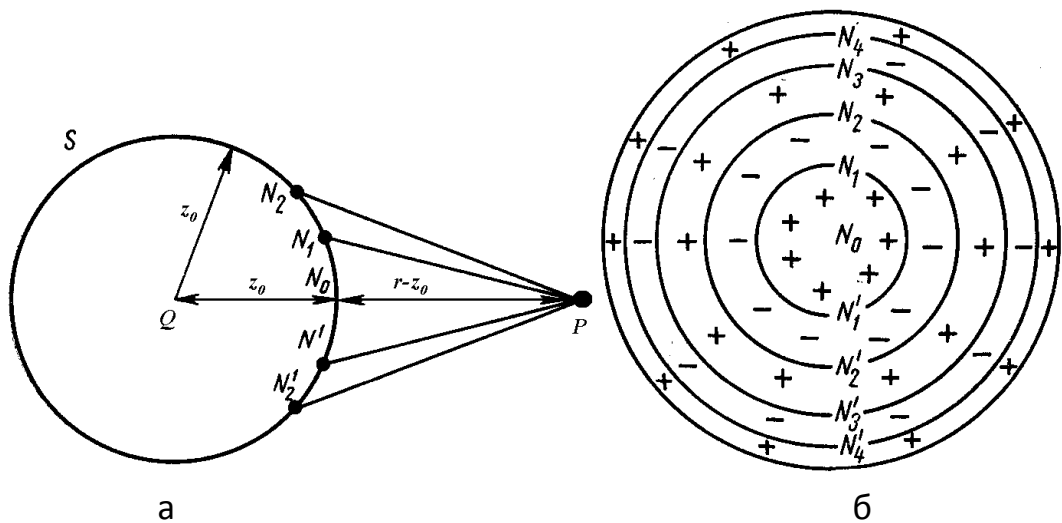


Рисунок 14.4 – Вычисление зон Френеля

Воображаемые источники вторичных волн, расположенные в пределах первой зоны, характеризуются тем, что создаваемые ими фазы колебаний в точке P отличаются от фазы, создаваемой виртуальным излучателем в точке N_0 , не более чем на 180° . Фаза колебаний, создаваемых излучателями соседних зон, отличается на величину 180° . На рисунке 14.4,б данное обстоятельство условно отмечается последовательным изменением знаков «плюс» и «минус».

Действия смежных зон высших порядков взаимно компенсируются, причем, чем больше порядковый номер зон, тем полнее осуществляется эта компенсация. В результате такой попарной нейтрализации смежных зон совокупное действие всех зон эквивалентно действию примерно половины первой зоны. Таким образом, первая зона Френеля (с известным «запасом») и ограничивает область пространства, существенно участвующую в процессе распространения волн.

Радиус n -й зоны Френеля может быть вычислен с использованием формулы:

$$r_n = \sqrt{n \frac{\lambda z_0 (r - z_0)}{r}}. \quad (14.3)$$

Точки N_n с рисунка 14.4 лежат на поверхности эллипсоида вращения, фокусы которого находятся в точках Q и P (рисунок 14.5).

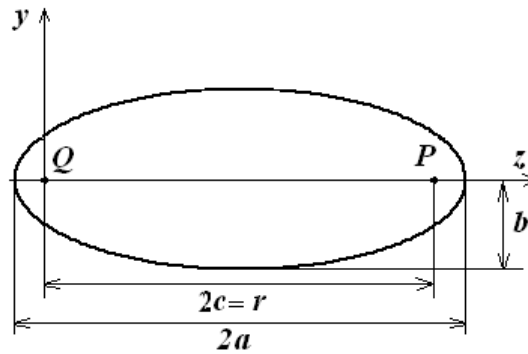


Рисунок 14.5 – Продольное сечение области, существенной для распространения радиоволн

Параметры сечения эллипсоида вращения в угломестной плоскости: большая a и малая b полуоси, а также фокусное расстояние c и эксцентриситет e , определяются соответственно выражениями:

$$b = r_{1\max} = \frac{\sqrt{\lambda r}}{2}, \quad c = 0.5r, \quad a = \sqrt{c^2 + b^2}, \quad e = b/a. \quad (14.4)$$

Таким образом, энергия радиоволны передается не по нитевидному каналу, а в пределах вполне конкретного объема пространства, имеющего форму эллипсоида вращения и ограниченного зонами Френеля. При ограничении существенной области 8 зонами Френеля ошибка в вычислении поля не превышает 16%. Эллипсоид вращения, образованный восемью зонами Френеля, *образует область, существенную для распространения радиоволн.*

Следует отметить, что существенная область имеет форму эллипсоида вращения только при использовании ненаправленных антенн в точках приема и передачи. Реально ее форма более сложная и зависит от диаграммы направленности антенн. Если препятствие перекрывает прямой луч между передающей и приемной антеннами, то поле в точке приема создается оставшимися свободными от препятствий зонами Френеля. За счет этого волна огибает препятствие (явление дифракции).

14.3. Распространение радиоволн в условиях пересеченной местности и при наличии потерь. Критерий Релея

При проведении расчетов параметров радиотрасс часто приходится встречаться со случаем, когда антенны корреспондирующих станций находятся в пределах прямой видимости, однако сама трасса проходит над холмистой местностью, являющейся типичным ландшафтом для большинства материков.

С точки зрения распространения радиоволн степень пересеченности местности определяется соотношением между длиной волны и высотой холмов.

Для оценки шероховатости отражающей поверхности используются критерий Релея:

$$h < \frac{\lambda}{8 \sin \gamma}, \text{ [м]}, \quad (14.5)$$

где γ - угол скольжения. При выполнении данного условия поверхность можно считать гладкой. Геометрия задачи приведена на рисунке 14.6.

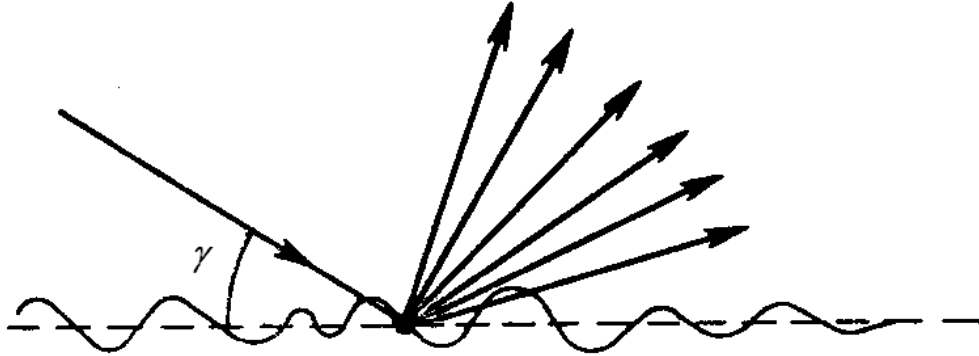


Рисунок 14.6 – К нахождению критерия Рэлея

Анализ формулы (14.5) показывает, что высота неровностей, при которой отражения приобретают диффузный характер, зависит не только от длины волны, но и от угла скольжения γ : чем меньше угол скольжения, тем выше должны быть препятствия, при которых отражения приобретают диффузный характер.

Поскольку при отражениях от шероховатой поверхности энергия отраженной волны в известной степени уменьшается, то напряженность поля в направлении отраженного луча уменьшается. Таким образом, неровности на отражающей поверхности вызывают уменьшение коэффициента отражения. Это обуславливает необходимость внесения соответствующих поправок в значение коэффициента отражения (уменьшив его). Необходимо при этом помнить, что отраженный луч формируется не в одной точке, а в пределах области, ограниченной первой зоной Френеля. Именно в пределах данной области и надлежит оценивать степень шероховатости отражающей поверхности.

При расчете поля в случае распространения над пересеченной местностью вводят понятие *просвета* h . *Просвет* определяет расстояние между самой высокой точкой профиля трассы (точкой О на рисунке 14.7) и линией QP , соединяющей центры передающей и приемной антенн.

Степень открытости трассы определяют путем сравнения просвета с величиной просвета h_0 , при которой множитель ослабления равен единице, а разность длин между QP и QOP составляет величину $\lambda / 6$:

$$h_0 = \sqrt{\frac{\lambda [\text{м}] z_0 [\text{км}] (r - z_0) [\text{км}] \cdot 10^3}{3r [\text{км}]}}. \quad (14.6)$$

Если просвет на трассе меньше нуля, *трассу* называют *закрытой*. На закрытой трассе поле в точке приема создается за счет дифракции. Если выполняется

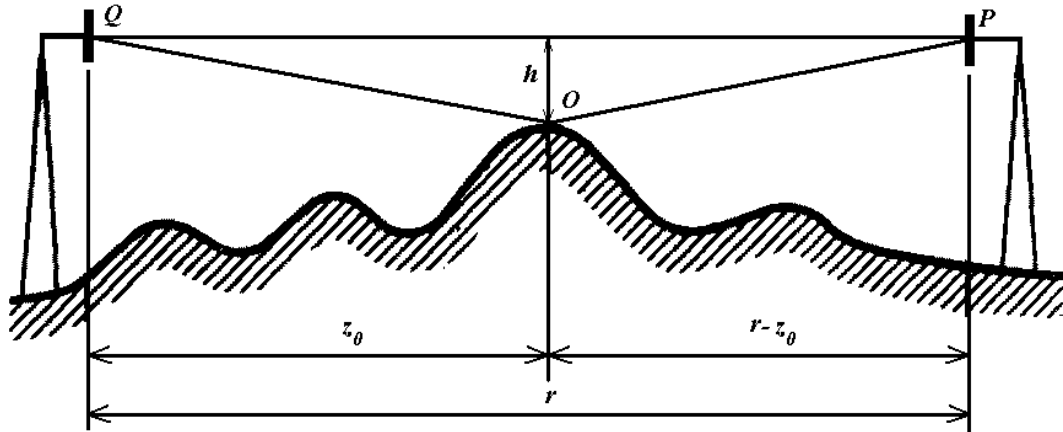


Рисунок 14.7 – Геометрия задачи определения типа трассы

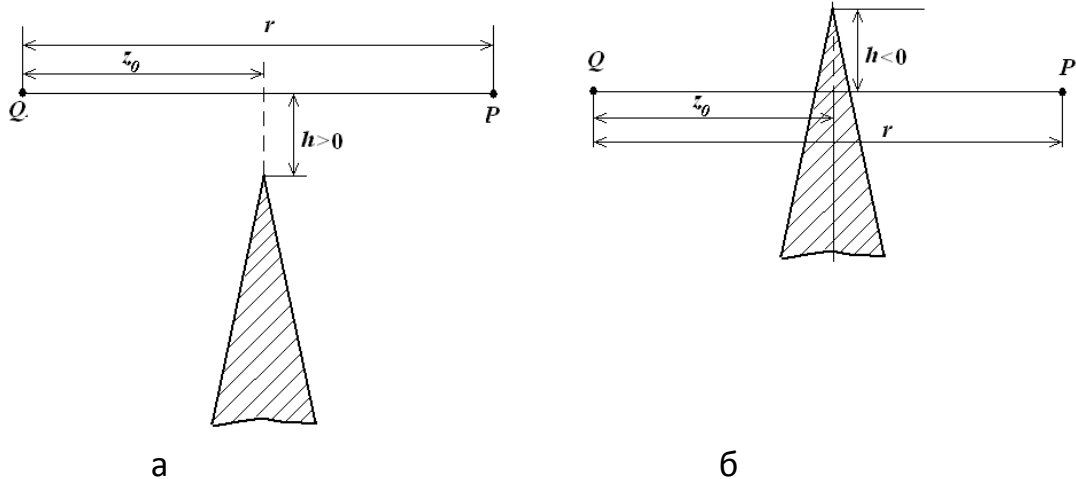


Рисунок 14.8 – Использование задачи о дифракции на клине для нахождения функции ослабления поля

условие $0 < h < h_0$, трасса называется *полуоткрытой* или *полузакрытой*, а при выполнении условия $h > h_0$ трасса *открытая*.

Величина просвета в зависимости от положения препятствия относительно линии распространения волны QP может быть положительной (рисунок 14.8,а, случай открытой линии) и отрицательной (рисунок 14.8,б, закрытая линия).

Комплексная амплитуда электрического поля в точке приема на основе использования модели дифракции на полуплоскости электромагнитной волны, возбуждаемой вертикальным электрическим вибратором, определяется соотношением:

$$\dot{E}_\varphi(P) = \dot{E}_0(Q)\Phi(h, \lambda, z_0, r), \quad (14.7)$$

в котором \dot{E}_0 - комплексная амплитуда поля в точке источника Q ; $\Phi(\cdot)$ - функция, описывающая влияние полуплоскости (препятствия), т.е. ослабление поля за счет препятствия. Данная функция имеет вид:

$$\Phi(\cdot) = 0.5 - f(v_1), \quad (14.8)$$

где $v_1 = -h \sqrt{\frac{2r}{\lambda z_0 (r - z_0)}} = -h \frac{\sqrt{2}}{r_1}$ - приведенная к значению радиуса первой зоны Френеля в точке расположения препятствия (z_0) величина просвета;

$$f(v_1) = \sqrt{\frac{i}{2}} (C(v_1) - iS(v_1)); \quad (14.9)$$

$C(\cdot)$, $S(\cdot)$ - соответственно косинус- и синус-интегралы Френеля, являющиеся табулированными функциями.

Для выявления закономерностей влияния препятствия на амплитуду поля проанализируем зависимость $\Phi(v_1)$ от величины приведенного просвета v_1 , график которой показан на рисунке 14.9.

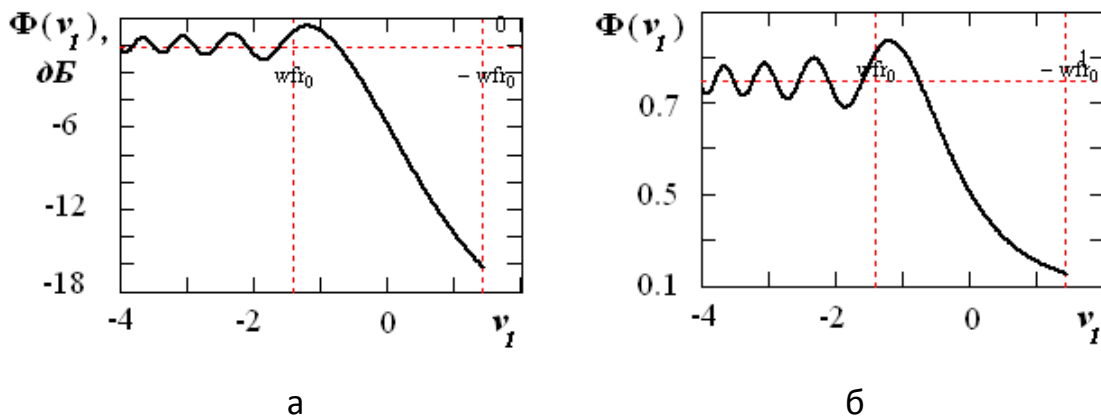


Рисунок 14.9 – Зависимость функции ослабления от приведенной величины просвета

Анализ данного графика показывает, что препятствия, для которых приведенное значение просвета больше нуля, т.е. закрытых трасс, комплексная амплитуда поля меньше 0.5, т.е. препятствие ослабляет величину принимаемого в точке P поля. При перекрытии полностью области, соответствующей первой зоне Френеля, показанной на рисунках вертикальными штриховыми линиями, амплитуда поля уменьшается почти в 7 раз.

При $v_1 = 0$ (половина площади области, существенной при распространении волны, перекрыта препятствием) модуль амплитуды поля равен половине напряженности поля в свободном пространстве. При очень малых v_1 , т.е. большом удалении препятствия вниз от линии распространения волны QP , препятствие практически не оказывает влияния на величину комплексной амплитуды, а поле имеет осциллирующий около единицы характер. Однако при частичном перекрытии области, существенной для распространения волн, поле может даже не только ослабляться, но и усиливаться. Максимальное усиление поля в 1,181 раза по сравнению с излучаемым происходит при значении приведенного просвета, рав-

ного $\nu_1 = -1.224$. Физически данный эффект наблюдается при дифракции волны на кромке полуплоскости, когда перераспределяются соотношения фаз в первой и второй зонах Френеля.

Лекция N 15. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов

15.1 Метод зеркальных изображений применительно к диапазону УКВ

Как уже отмечалось ранее, в зависимости от расстояния между приемной передающей антеннами (по сравнению с зоной прямой видимости) учитывается или не учитывается сферичности поверхности Земли. Рассмотрим случай, когда расстояние между антеннами не превышает $0,2r_{\text{пр}}$ и можно использовать плоскую модель Земли. При этом будем считать, что приемная и передающая антенны подняты над поверхностью Земли на высоту нескольких длин волн. Практически поднять антенну на такую высоту можно только в диапазоне УКВ. В этом случае волна достигает поверхности земли на значительном (в масштабе длине волны) расстоянии от излучателя, и участок фронта волны вблизи земной поверхности можно считать плоским.

На границе раздела воздух-земля происходит отражение волны, причем напряженность электрического поля отраженной волны определяется при помощи коэффициента отражения. Поле в месте приема является результатом интерференции полей прямой волны и волны, отраженной от земной поверхности (см. рисунок 15.1). Здесь прямая волна распространяется по пути $q_1 p$, а отраженная - по пути $q_1 m p$. Обозначим через R длину линии связи, а через h_1 и h_2 высоты расположения передающей и приемной антенн. Предположим, что выполняется условие h_1 и $h_2 \gg \lambda$.

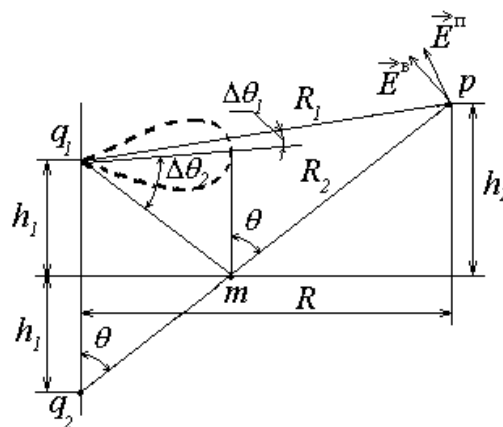


Рисунок 15.1 – Применение метода зеркальных изображений для нахождения поля диполя над границей раздела двух сред

Электродинамика и распространение радиоволн

Для нахождения амплитуды отраженной волны воспользуемся *методом зеркальных изображений*. В соответствии с ним полагают, что отраженное поле возбуждается фиктивным источником, расположенным зеркально относительно границы раздела сред. Вторая среда (в данном случае земля) заменяется средой, в которой определяется поле. Таким образом, расчет поля в неоднородной среде сводится к расчету поля в однородных средах. Замена наведенных токов добавочными (фиктивными) основывается на теореме эквивалентных поверхностных токов. В связи с этим добавочные токи и их расположение определяются исходя из граничных условий.

Таким образом, путь отраженной волны $q_1 m p$ можно заменить равным ему путем $q_2 m p$, если считать, что источником отраженной волны является вибратор, находящийся на расстоянии h_1 под поверхностью, а влияние земли можно заменить действием второго вибратора. Амплитуда фиктивного источника определяется формулами для коэффициентов отражения в точке m . Напомним, что формулы Френеля были получены из решения соответствующей граничной задачи.

Учитывая приведенные допущения, путем геометрических расчетов модуль напряженности электрического поля в точке приема p определяют с использованием *интерференционной формулы*:

$$|\dot{E}| = |\dot{E}_1 + \dot{E}_2| = |\dot{E}_1| |\dot{V}(\theta)|, \quad (15.1)$$

где E_1 - напряженность электрического поля прямой волны; $|\dot{V}(\theta)|$ - модуль *интерференционного множителя*, учитывающего влияние Земли, определяемый по формуле

$$|\dot{V}(\theta)| = \sqrt{1 + |\dot{R}|^2 + 2|\dot{R}| \cos(2kh_1 \cos \theta + \varphi)}. \quad (15.2)$$

где \dot{R} – комплексный коэффициент отражения; θ - угол падения; φ - фаза коэффициента отражения.

Учитывая направленные свойства излучателя, т.е. его диаграмму направленности $F(\theta)$, а также мощность P и коэффициент направленного действия D , формула (15.1), описывающая суммарное поле на расстоянии R , приобретает вид:

$$|\dot{E}(\theta)| = \frac{\sqrt{60PD}}{R} \cdot F(\theta_1) |\dot{V}(\theta)|, \quad (15.3)$$

где интерференционный множитель с учетом направленных свойств излучателей (передающего и приемного) приобретает вид:

$$|\dot{V}(\theta)| = \sqrt{1 + |\dot{R}|^2 \frac{|F(\pi - \theta)|^2}{|F(\theta)|^2} + 2|\dot{R}| \frac{|F(\pi - \theta)|}{|F(\theta)|} \cos \xi}, \quad (15.4)$$

$$\xi = -\varphi(\theta) - k\Delta r + \arg F(\pi - \theta) - \arg F(\theta). \quad (15.5)$$

В частном случае слабонаправленного излучателя

$$F(\theta) \approx F(\theta_1) \approx F(\pi - \theta)$$

модуль интерференционного множителя принимает вид (15.2).

В предыдущих рассуждениях мы полагали, что земля является плоской и гладкой. Кроме того, при изучении области пространства, существенной для прохождения радиоволн, было отмечено, что энергия радиоволны распространяется не вдоль тонкого луча, а внутри эллипсоида вращения, поперечные размеры которого определяются областями Френеля. С учетом данной области при наклонном падении волны на поверхности первая зона Френеля представляет собой эллипс, большая ось которого вытянута в направлении распространения волны. Размеры первой зоны Френеля на реальных УКВ трассах могут составлять многие километры в продольном и десятки метров в поперечном направлении. В связи с этим при распространении радиоволн над неоднородной поверхностью прежде, чем рассчитывать напряженность поля, следует определить положение и размеры отражающей области. Так, например, если отражающая область падает на ограниченную водную поверхность (озеро), тогда как передающие и приемные пункты находятся на суше на сравнительно большом удалении от берега, то при расчете напряженности поля следует пользоваться коэффициентами отражения от водной поверхности, т.е. характер поля будет такой, как если бы вся трасса проходила над водной поверхностью. Если распространение радиоволн происходит над неровной поверхностью, то рассеяние радиоволн неровностями приводит к уменьшению эффективного коэффициента отражения, а, следовательно, к сглаживанию максимумов и минимумов интерференционной диаграммой направленности.

Наиболее важным для практики распространения УКВ вдоль поверхности Земли случаем является пологое распространение лучей $(\theta \rightarrow 90^\circ)$.

В этом случае приведенные выше формулы также могут быть упрощены. В частности, интерференционный множитель при этом называется формулой Введенского и имеет вид:

$$|\dot{V}| \approx \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda R}. \quad (15.6)$$

При выводе данной формулы делается ряд допущений, поэтому для ее применения имеет ряд ограничений, которые допустимы для УКВ при связи в пределах прямой видимости.

В частности, формула Введенского применима, если выполняется условие

$$kh_1 \cos \theta < \frac{\pi}{9}. \quad (15.7)$$

15.2 Поле диполя с использованием второй модели

В случае, когда расстояние между передающей и приемной антенной принадлежит интервалу $0.2r_{\text{пр}} < R < 0.8r_{\text{пр}}$, следует учитывать сферичность Земли. Схема распространения волн в этом случае показана на рисунке 15.2. Наибольший интерес заключается в определении возможности применения фор-

Электродинамика и распространение радиоволн

мулы (15.6). Оказывается, что последняя может быть использована, если заменить высоты h_1 и h_2 на приведенные высоты h'_1 и h'_2 .

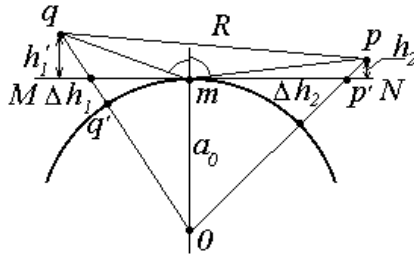


Рисунок 15.2 – Вычисление приведенных высот

Проведем в точке отражения волны m плоскость MN , касательную к поверхности Земли, и будем отсчитывать высоты от этой плоскости. В этом случае картина распространения радиоволн над сферической поверхностью Земли будет аналогична картине распространения волн над плоской поверхностью.

Из условий $h_{1,2} \ll \theta$ и $0.2r_{\text{пр}} < R < 0.8r_{\text{пр}}$ можно сделать вывод, что $h'_1 \approx h_1 - \Delta h_1$, $h'_2 \approx h_2 - \Delta h_2$. Решая геометрическую задачу, получаем:

$$\Delta h_1 \approx \frac{(q'm)^2}{2a_0}, \quad \Delta h_2 \approx \frac{(p'm)^2}{2a_0}. \quad (15.8)$$

Положение точки m выбирается следующим образом. При $R < 0.5r_{\text{пр}}$ расположение точки вычисляется, как и для плоской земной поверхности

$$mq' \approx \frac{Rh_1}{h_1 + h_2}, \quad mp' \approx \frac{Rh_2}{h_1 + h_2}, \quad (15.9)$$

а при значительных расстояниях между антеннами

$$mq' \approx \frac{R\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}, \quad mp' \approx \frac{R\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}. \quad (15.10)$$

Для промежуточных случаев берут положение точки m как среднее двух положений, определяемых формулами (15.9) и (15.10).

15.3 Поле диполя с учетом потерь в Земле

В первом вопросе данной лекции результирующее поле в точке приема представлялось в виде интерференции падающей и отраженной от поверхности Земли волн. Поверхность Земли обладает значительной электропроводностью, следовательно, необходимо учитывать тепловые потери и дополнительное ослабление волн, вызванное изменением структуры поля волны.

Учет данных явлений будем осуществлять следующим образом.

Для учета конечной проводимости земли используем комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i60\lambda\sigma, \quad (15.11)$$

где λ - длина волны передающей антенны в свободном пространстве; ε, σ - соответственно относительная проницаемость поверхности Земли и ее электрическая проводимость.

Как известно, коэффициент отражения (коэффициент Френеля) зависит от поляризации падающей волны. Предположим, что первая среда является воздухом, т.е. $\varepsilon_1 = 1, \mu_1 = 1$, а вторая (земля) имеет $\mu_2 = 1$ и комплексную относительную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\varepsilon}$. С учетом сделанных допущений коэффициенты отражения волн вертикальной и горизонтальной поляризаций становятся комплексными и принимают вид:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\tilde{\varepsilon} - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\tilde{\varepsilon} - \sin^2 \theta}}, \quad (15.12) \quad R_{\parallel} = \frac{\tilde{\varepsilon} \cos \theta - \sqrt{\tilde{\varepsilon} - \sin^2 \theta}}{\tilde{\varepsilon} \cos \theta + \sqrt{\tilde{\varepsilon} - \sin^2 \theta}}. \quad (15.13)$$

Рассмотрим влияние конечной проводимости Земли на диаграммы изотропного излучателя, различным образом ориентированным относительно поверхности Земли. Так, диаграммы направленности в вертикальной (угломестной) плоскости элементарных электрических вибраторов, расположенных в свободном пространстве и ориентированных перпендикулярно поверхности Земли (вертикальный вибратор) и параллельно поверхности Земли (горизонтальный вибратор), описываются зависимостями:

$$F_{\theta}(\theta) = \sin \theta, \quad F_{\phi}(\theta) = 1. \quad (15.14)$$

Учет конечной проводимости земли приводит в обоих случаях появлению изрезанности (многолучевости) в диаграмме направленности даже у изотропных излучателей (см. рисунок 15.3). На рисунке 15.3,а показаны ДН вертикального вибратора над идеально проводящей (штриховая линия) и конечной проводимости (сплошная линия) поверхностями. На рисунке 15.3,б аналогичными типами линий показаны ДН для горизонтально ориентированного вибратора.

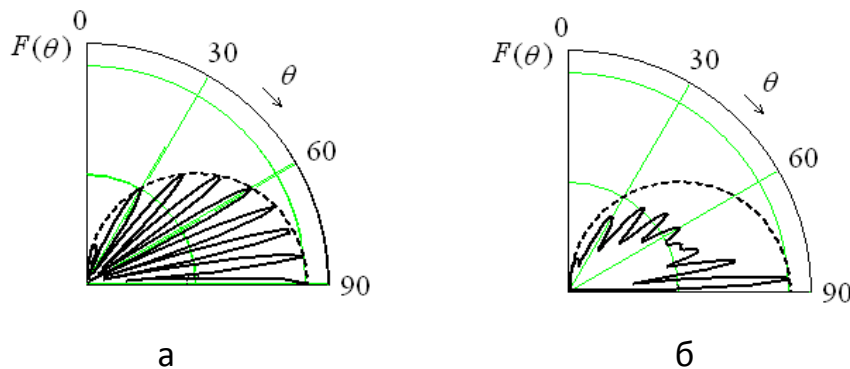


Рисунок 15.3 – Влияние свойств отражающей поверхности на диаграмму направленности электрического вибратора

Несложно заметить, что наличие комплексного характера относительной диэлектрической проницаемости земли обуславливает потери, и диаграмма направленности для углов, отличных от скользящего направления, имеет значения, намного меньшие диаграммы направленности излучателя в свободном пространстве. В случае отсутствия потерь при отражении (поверхность представляет собой

Электродинамика и распространение радиоволн

металлический экран) диаграмма направленности излучателя в свободном пространстве является огибающей соответствующей характеристики.

Число лепестков (максимумов) в квадранте диаграммы направленности зависит от высоты подвеса антенны в длинах волн и равно величине

$$N_{\max} = \left[\frac{2h_1}{\lambda} + 0.5 \right], \quad (15.15)$$

где $[\cdot]$ - функция выделения целой части числа.

Положения экстремумов в диаграмме направленности вертикального вибратора определяются формулами:

$$\theta_{\min} = \arccos\left(n \frac{\lambda}{2h_1}\right), \quad \theta_{\max} = \arccos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\lambda}{2h_1}\right). \quad (15.16)$$

15.4 Поле вертикального электрического вибратора в диапазонах СВ и ДВ

До сих пор мы рассматривали распространение радиоволн УКВ диапазона. В диапазонах длинных и средних волн и частично в высокочастотном диапазоне, где длины волн равны от десятков километров до десятков метров, расположить антенны на больших по сравнению с длиной волны высотах не представляется возможным. Антенны, обычно выполняемые в виде вертикальных мачт или башен, располагаются непосредственно у земной поверхности. Падающее на земную поверхность электромагнитное поле при этом нельзя считать локально плоским, а вторичное поле нельзя вычислить с помощью коэффициентов отражения. Для определения поля применяются строгие методы. Как и ранее, при небольшой протяженности радиотрасс применяют модель плоской Земли. Параметры почвы сначала считаются однородными. Влияние атмосферы на электромагнитное поле не учитывается.

Допуская, что поверхность земли является идеально проводящей, т.е. $\sigma \rightarrow \infty$, воздействие нижней среды на электромагнитное поле в верхнем полупространстве можно заменить зеркальным изображением вибратора. Ток в зеркальном изображении равен по амплитуде и фазе току в истинном источнике. Так как вибратор расположен у земной поверхности, то общая действующая длина (излучатель + зеркальное изображение) удваивается.

Запишем выражение для вертикальной составляющей поля. При этом введем декартову систему координат, ось Oy которой совпадает с осью вибратора, т.е. перпендикулярно поверхности раздела сред. Тогда можно записать:

$$E_y = \frac{I_m W_0}{4\pi} 2\ell_d F(\theta, \varphi) \frac{\exp(-ikR)}{R}. \quad (15.17)$$

Горизонтальная составляющая поля на поверхности раздела сред, т.е. компонента E_z равна нулю. Диаграмма направленности такой антенны имеет максимум излучения вдоль земной поверхности, как показано на рисунке 15.4.

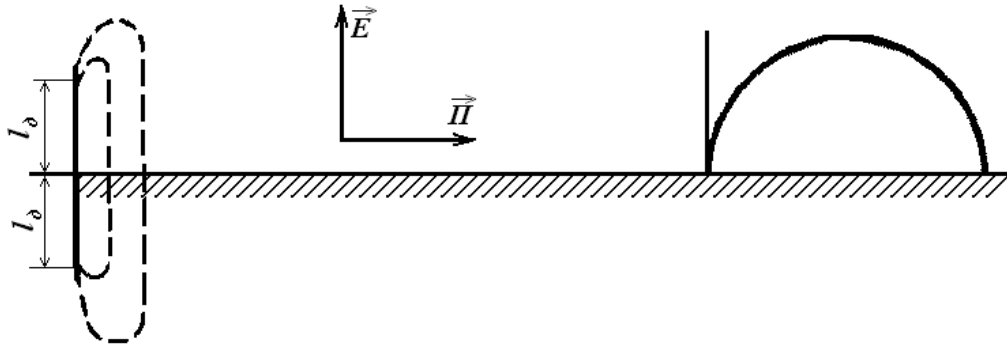


Рисунок 15.4 – Задача об излучении диполя вблизи металлической поверхности

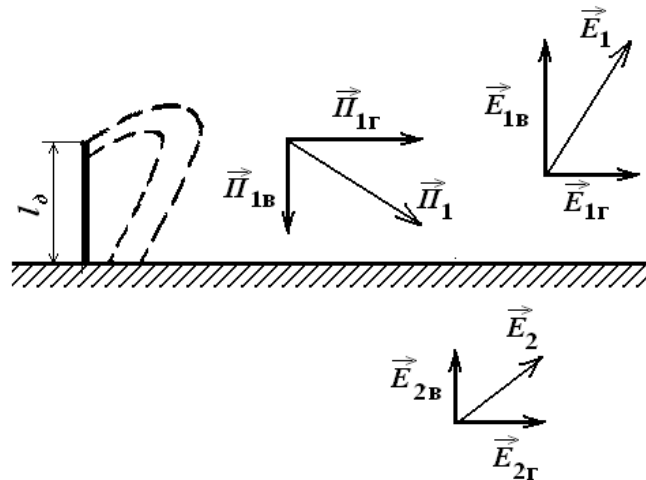


Рисунок 15.5 – Задача об излучении диполя вблизи поверхности с потерями

Если поверхность, вблизи которой расположен излучатель, не является идеальным проводником, то часть энергии радиоволн, распространяющихся от антенны, проникает вглубь земной поверхности. Следовательно, помимо составляющей вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}_{1\Gamma}$, направленной вдоль поверхности, имеется составляющая $\vec{\Pi}_{1B}$, направленная перпендикулярно к поверхности земли (см. рисунок 15.5). Суммарный вектор Пойнтинга оказывается наклоненным к земной поверхности под некоторым углом, а, следовательно, и вектор напряженности электрического поля \vec{E}_1 направлен к земной поверхности под углом, не равным 90° . Поэтому при распространении волны над полупроводящей поверхностью, помимо вертикальной составляющей вектора напряженности электрического поля имеет и горизонтальная составляющая. Соотношение амплитуд вертикальной и горизонтальной составляющими определяется формулой:

$$E_\Gamma = \frac{E_B}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}}} = \frac{E_B \exp\left[-\frac{i}{2} \arg \tilde{\varepsilon}\right]}{\sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}}. \quad (15.18)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

В диапазонах длинных и средних волн это отличие составляет десятки раз. В связи с этим в данных диапазонах используются антенны вертикальной поляризации.

Наличие фазового сдвига $0,5 \arg \tilde{\varepsilon}$ между вертикальной и горизонтальной составляющими вектора напряженности электрического поля приводит к тому, что результирующее поле имеет эллиптическую поляризацию, причем, поскольку $|E_v| \gg |E_h|$ для обычных почв, то эллипс поляризации вытянут в вертикальном направлении.

Влияние почвы на электромагнитное поле в инженерных расчетах учитывается с помощью множителя влияния среды (формула Шулейкина - Ван дер Поля):

$$E_v = \frac{W_0 I_0 \ell_d}{R \lambda} w, \quad (15.19)$$

$$\text{где} \quad |w| \approx \frac{2 + 0,3\rho}{2 + \rho + 0,6\rho^2}. \quad (15.20)$$

$$|\rho| \approx \frac{\pi R}{|\tilde{\varepsilon}| \lambda}. \quad (15.21)$$

Параметр ρ , входящий в данные формул, называется иногда «численным расстоянием».

Лекция N 16. Распространение радиоволн в тропосфере

16.1 Электрические параметры атмосферы

До сих пор рассматривались модели радиотрасс, не учитывающие влияние атмосферы. Прежде, чем приступить к изучению влияния атмосферы рассмотрим ее структуру. Как известно, атмосфера Земли включает в себя отличающиеся своими электрическими свойствами следующие области, показанные на рисунке 16.1: *нейтросферу*, состоящую из *тропосферы* (до 12-18 км от поверхности Земли) и *стратосферы* (от верхней границы тропосферы до 60 км), и *ионосферу* (от 60 км до верхней границы атмосферы, достигающей примерно 20 000 км). Границы между областями атмосферы изменяются в зависимости от времени года, времени суток, географического района и других факторов.

Состав газа в тропосфере и стратосфере такой же, как у поверхности Земли: азот занимает примерно 78% объема, молекулярный кислород – 21%, аргон – 0,33%, остальные газы содержатся в еще меньших количествах.

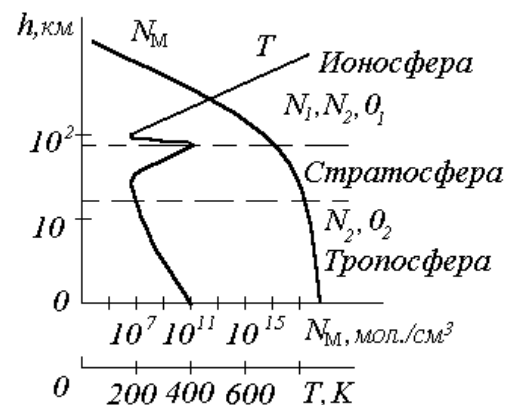


Рисунок 16.1 – Структура атмосферы Земли

Электродинамика и распространение радиоволн

В ионосфере под действием солнечной радиации происходит диссоциация кислорода и азота, и появляются атомарные составляющие этих газов. Газы в ионосфере не перемешиваются и располагаются слоями в соответствии с их молекулярным весом. Кроме того, начиная с высоты примерно 60 км, газы ионизируются, за счет чего здесь имеется значительное количество свободных электронов и ионов. Более подробно распределение параметров ионосферы будет рассматриваться на следующей лекции.

Электрические параметры тропосферы определяются давлением, температурой и влажностью. Указанные параметры меняются с изменением метеорологических условий. В связи с этим для проведения расчетов радиолиний принята модель, называемая **нормальной тропосферой**, параметры которой равны:

- атмосферное давление у поверхности Земли, равное $p_0=0,01$ МПа, с увеличением высоты уменьшается на 120 Па/км;
- температура у поверхности Земли $T=288^\circ\text{K}$ и с увеличением высоты уменьшается на 5,5 град/км;
- относительная влажность $S=60\%$ не меняется с высотой;
- верхняя граница нормальной тропосферы принята равной по высоте 11км.

Электрические параметры стратосферы определяются теми же факторами, что и параметры тропосферы, но, поскольку плотность газа в стратосфере значительно меньше, эта область оказывает меньше влияния на распространение радиоволн, чем тропосфера. Поэтому далее основное внимание будет уделено изучению влияния тропосферы на распространение радиоволн.

В тропосфере помимо регулярных сезонных и суточных изменений параметров происходят непрерывные случайные изменения, вызванные различными причинами. Возникающие при этом флуктуации параметров радиоволн будут рассмотрены ниже.

Измерения показывают, что относительная диэлектрическая проницаемость тропосферы (воздуха) незначительно превышает единицу, однако изменение диэлектрической проницаемости тропосферы во времени и пространстве существенно влияют на распространение радиоволн короче 10м. Относительная магнитная проницаемость тропосферы $\mu=1$. Проводимость тропосферы σ для частот, соответствующих радиоволнам (за исключением миллиметровых волн), практически равна 0; диэлектрическая проницаемость ε и, следовательно, показатель преломления n являются функциями давления и температуры воздуха, а также давления водяного пара.

С учетом экспериментальных данных формула для относительной диэлектрической проницаемости записывается в виде:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1.552 \cdot 10^{-6}}{T} \left(p + \frac{4810 p_{\text{п}}}{T} \right), \quad (16.1)$$

где $p = p_n + p_{\text{г}}$; $p_n, p_{\text{г}}$ - соответственно парциальные давления пара и газа, выраженные в Паскалях; T – абсолютная температура.

16.2 Явления, имеющие место при распространении радиоволн в тропосфере

Тропосфера, как следует из вышесказанного, представляет собой неоднородную среду, и распространяющиеся в ней радиоволны претерпевают рефракцию, затухание, связанное с частичным преобразованием электрической энергии в тепловую, а также рассеяние на неоднородностях.

Рефракция ЭМВ в атмосфере – это атмосферно-оптическое явление, вызываемое преломлением лучей ЭМВ в атмосфере и проявляющееся в кажущемся смещении удалённых объектов, а иногда и в кажущемся изменении их формы.

Данное явление обусловлено тем, что обычно диэлектрическая проницаемость тропосферы и показатель преломления уменьшаются с высотой. Следовательно, по мере подъема возрастает фазовая скорость радиоволны. Данное обстоятельство приводит к тому, что при распространении радиоволны вдоль луча под некоторым углом вследствие того, что в верхних слоях тропосферы волна

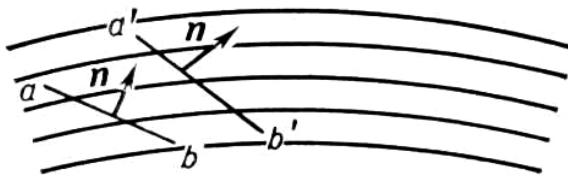


Рисунок 16.2 – Рефракция луча в тропосфере

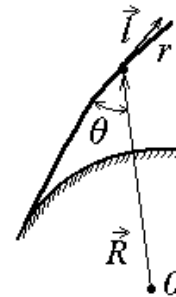


Рисунок 16.3 – Искривление траектории луча

распространяется с большей скоростью, чем в нижних, верхняя часть фронта волны обгоняет нижнюю, и фронт волны поворачивается (луч искривляется) (см. рисунок 16.2).

Поясним сказанное выше с помощью математических представлений. Фазовый путь по лучу описывается с помощью понятия эйконала, обозначаемого L . В случае сферической слоистой среды, которой можно аппроксимировать структуру тропосферы, траектория волны, показанная на рисунке 16.3, будет описываться соотношением:

$$nR \sin \theta = \text{const}, \quad (16.2)$$

а эйконал L , или фазовый путь по лучу, определяется по формуле

$$L = \int_r n(r) dr. \quad (16.3)$$

Определим радиус кривизны траектории. Для этого обратимся к рисунку 16.4, где изображены две сферические поверхности, отстающие одна от другой по радиусу на расстояние dh , на котором коэффициент преломления изменяется на величину dn .

Электродинамика и распространение радиоволн

Искомый радиус кривизны ρ , определяемый из геометрии задачи, приведенной на рисунке 16.4, для сред с плавно меняющимся значением коэффициента преломления закон преломления (закон синуса) определяется формулой:

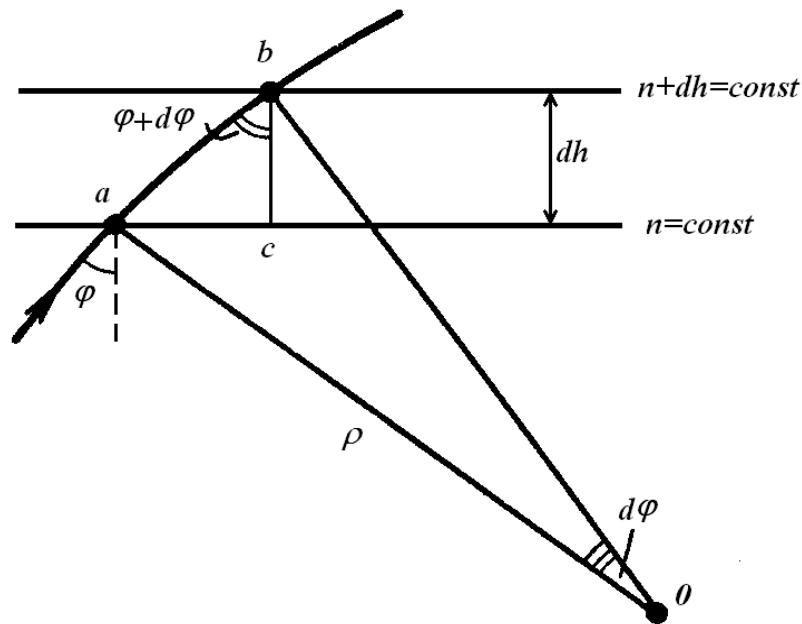


Рисунок 14.4 – Вычисление кривизны траектории луча

$$\rho = -\frac{n}{\frac{dn}{dh} \sin \varphi}. \quad (16.4)$$

В тропосфере основной интерес представляет распространение пологих лучей ($\varphi \rightarrow 90^\circ$, $n \approx 1$), для которых формула (16.4) приобретает вид

$$\rho = -\frac{1}{\frac{dn}{dh}}. \quad (16.5)$$

Знак «минус» показывает, что траектория имеет положительную кривизну, т.е. обращена выпуклостью вверх.

16.3 Рефракция радиоволн

Рассмотрим, как можно учесть влияние тропосферной рефракции на распространение радиоволн при поднятых передающей и приемной антеннах в условиях применимости интерференционных формул. Как известно, подобные условия встречаются только в диапазоне УКВ. Вывод интерференционных формул основывался на предположении, что как прямой, так и отраженный от поверхности Земли лучи распространяются по прямолинейным траекториям, притом с постоянной скоростью. Данный аппарат оказывается возможным применить и для слу-

Электродинамика и распространение радиоволн

чая атмосферной рефракции, если свести реальную криволинейную траекторию распространения волн к прямолинейной над воображаемой поверхностью с эквивалентным радиусом $a_{\text{экв}}$ (рисунок 16.5). Величина *эквивалентного радиуса Земли* определяется равенством

$$a_{\text{экв}} = \frac{a_0}{1 + a_0 \frac{dn}{dh}}. \quad (16.6)$$

Случаи рефракции можно классифицировать в зависимости от знака и величины dn/dh .

Отрицательная тропосферная рефракция: $dn/dh > 0$. Показатель преломления возрастает с высотой, и траектория волны обращена выпуклостью вниз ($\rho < 0$). Эквивалентный радиус Земли оказывается меньше (см. рисунок 16.5,а), что приводит к уменьшению напряженности поля в точке приема.

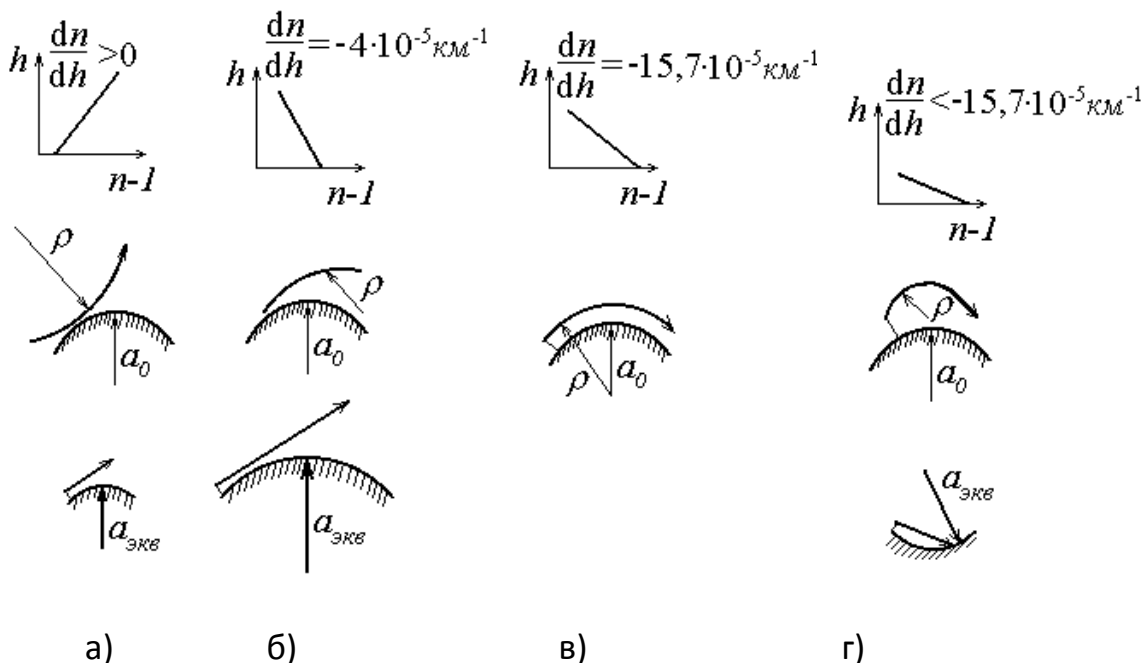


Рисунок 16.5 – Классификация видов рефракции

Положительная тропосферная рефракция: $dn/dh < 0$. Коэффициент преломления убывает с высотой, и траектория обращена выпуклостью вверх ($\rho > 0$). При этом различают три частных случая:

- *нормальная рефракция*, когда $dn/dh = -4 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$, $\rho = 25\,000 \text{ км}$, $a_{\text{экв}} = 4/3 a_0$ (рисунок 16.5,б);

- *критическая рефракция*, когда $dn/dh = -15.7 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1} = -1/a_0$, $\rho = a_0$, $a_{\text{экв}} \rightarrow \infty$ - эквивалентная земная поверхность представляется плоской, т.к. волна движется параллельно этой поверхности на постоянной высоте (рисунок 16.5,в);

- *сверхрефракция*, когда $dn/dh < -1/a_0$, $\rho < a_0$, $a_{\text{экв}} < 0$, наступает полное внутреннее отражение волны в тропосфере и луч возвращается к земной поверхности. Эквивалентный радиус Земли оказывается отрицательным (рисунок 16.5,г), так

Электродинамика и распространение радиоволн

что волна, имеющая эквивалентную прямолинейную траекторию, будет падать на «вогнутую» поверхность Земли.

Перечислим основные случаи, когда можно использовать эквивалентный радиус земного шара.

Расстояние прямой видимости с учетом рефракции определяется формулой:

$$r_{пр.экв} = 1.15 r_{пр} \text{ [км]}. \quad (16.7)$$

В условиях нормальной рефракции $R_{экв} / R_0 \approx 1.15$, т.е. наблюдается увеличение расстояния прямой видимости на 15%.

Амплитуда напряженности поля с учетом рефракции приближенно рассчитывается в пределах применимости формулы Введенского при подстановке в формулу приведенных высот, полученных в предыдущей лекции, значения эквивалентного радиуса Земли. При нормальной рефракции приведенные высоты антенн h' увеличиваются и, следовательно, напряженность поля возрастает.

16.4. Условия возникновения сверхрефракции

Вопрос об условиях возникновения сверхрефракции является особенно важным, поскольку на использовании данного явления базируется распространение волн по так называемому тропосферному волноводу.

Как известно, режимом сверхрефракции может быть охвачена ограниченная по высоте область тропосферы, где выполняется условие $dn / dh < -15,7 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$ или $dn / dh < -0,157 \text{ м}^{-1}$. При сверхрефракции индекс преломления убывает с высотой примерно в четыре раза быстрее, чем при нормальной рефракции.

Возникновению сверхрефракции благоприятствуют метеорологические условия, соответствующие возникновению температурной инверсии, заключающееся в том, что в некотором интервале высот температура воздуха не уменьшается с высотой, а начинает возрастать.

Кроме того, возникновению сверхрефракции способствует и необычно быстрое уменьшение влажности с высотой.

Возникновению температурной инверсии способствуют три причины:

- горизонтальный перенос воздушных масс;
- радиационное охлаждение поверхности Земли;
- сжатие воздушных масс.

Картина распространения радиоволн в условиях сверхрефракции весьма напоминает процессы распространения в открытых волноводах, нижнюю стенку которого образует полупроводящая поверхность земли, а верхнюю – верхняя граница области сверхрефракции. Коэффициент преломления внутри этой области имеет большее значение, чем над ней.

Различие заключается в том, что в открытом волновode отдельные лучи претерпевают полное внутренне отражение и от нижней и от верхней стенок. При сверхрефракции волны испытывают обычное отражение от полупроводящей поверхности Земли и полное внутренне отражение внутри области, охваченной сверхрефракцией. При этом отражение внутри верхней области происходит на разной высоте для лучей с разными углами возвышения. Данная аналогия послу-

Электродинамика и распространение радиоволн

жила причиной того, что область сверхрефракции в тропосфере частот называют тропосферными волноводом или тропосферным волноводным каналом, а распространение в условиях сверхрефракции – волноводным распространением.

В тропосферных волноводах могут распространяться только те волны, длина которых не превышает критического значения ($\lambda_{кр} \approx 0,085 d^{3/2}$, d —высота волновода в м, $\lambda_{кр}$ в см). Толщина слоев инверсии в тропосфере обычно не превышает ~ 50—100 м, поэтому волноводным способом могут распространяться только дециметровые, сантиметровые и более короткие волны.

Значение сверхрефракции для осуществления дальней радиосвязи в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн невелико, так как само явление представляется случайным. Однако работа многих радиолокационных станций, расположенных вблизи морского побережья, использует данное явление для увеличения зоны обзора.

Основное значение сверхрефракции заключается в неожиданном увеличении дальности распространения волн, излучаемых действующими передатчиками, что может создать непредвиденные помехи.

16.5. Поглощение радиоволн и рассеяние на неоднородностях

При распространении в тропосфере помимо искривления траектории волны сантиметровых и более коротких волн наблюдается затухание, связанное с частичным преобразованием электрической энергии в тепловую и рассеянием.

Тропосфера прозрачна для всех радиоволн вплоть до сантиметровых. Более короткие волны испытывают заметное ослабление в капельных образованиях (дождь, град, снег, туман), в парах воды и газах атмосферы. Ослабление обусловлено процессами поглощения и рассеяния. Каждая капля воды обладает значительной проводимостью, и волна возбуждает в ней высокочастотные токи. Плотность токов пропорциональна частоте, поэтому значительные токи, а, следовательно, и тепловые потери, возникают только при распространении сантиметровых и более коротких волн. Эти токи вызывают не только тепловые потери, но являются источниками вторичного рассеянного излучения, ослабляющего прямой сигнал. Плотность потока рассеянной энергии обратно пропорциональна λ^4 , если размер рассеивающей частицы $d < \lambda$, и не зависит от λ , если $d \gg \lambda$. Практически через область сильного дождя или тумана волны с $\lambda < 3$ см распространяться не могут. Волны короче 1,5 см, помимо этого, испытывают резонансное поглощение в водяных парах ($\lambda = 1,5$ см; 1,35 см; 0,75 см; 0,5 см; 0,25 см) и кислороде ($\lambda = 0,5$ см и 0,25 см). Энергия распространяющейся волны расходуется в этом случае на ионизацию или возбуждение атомов и молекул. Между резонансными линиями имеются области малого поглощения.

Рассеяние сантиметровых радиоволн каплями дождя и тумана приводит к появлению отраженных сигналов, мешающих нормальной работе.

Помимо регулярных изменений ε с высотой в тропосфере существуют нерегулярные неоднородности (флуктуации) ε , возникающие в результате беспорядочного движения воздуха. На них происходит рассеяние радиоволн УКВ диапазона. Таким образом, область пространства, ограниченная диаграммами направ-

ленности приемной и передающей антенн и содержащая большое число неоднородностей ε , является рассеивающим объемом. Рассеяние приводит к флуктуациям амплитуды и фазы радиоволны, а также к распространению УКВ на расстояния, значительно превышающие прямую видимость. Поле в точке приёма образуется в результате интерференции рассеянных волн, вследствие чего возникают беспорядочные изменения амплитуды и фазы сигнала (флуктуации). Однако среднее значение амплитуды сигнала значительно превышает амплитуду, которая могла бы быть обусловлена нормальной тропосферной рефракцией.

Лекция N 17. Распространение радиоволн в ионосфере

17.1 Влияние постоянного магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере. Гироманитный резонанс

Ионизированный газ ионосферы находится в постоянном магнитном поле Земли, напряженность которого зависит от широты. Так, на экваторе его напряженность H_{\equiv} составляет 28 А/м, у магнитных полюсов - 56 А/м. Для средних геомагнитных широт можно полагать, что напряженность магнитного поля Земли равна приблизительно 40А/м. Присутствие постоянного магнитного поля изменяет условия движения электронов, благодаря чему изменяются и электрические параметры ионизированного газа. Электроны начинают вращаться вдоль силовых линий земли, как показано на рисунке 17.1. Частота вращения электронов при этом называется *гиротропной частотой* ω_m :

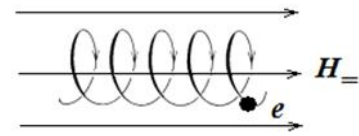


Рисунок 17.1 – Движение электронов вокруг силовых линий Земли

$$\omega_m = |\gamma| H_{\equiv}, \quad (17.1)$$

$\gamma = -2.21 \cdot 10^5$ Гц/(А•м) - гироманитное отношение.

Плазма является гиротропной средой с диэлектрической анизотропией, тензор диэлектрической проницаемости которой определяется выражением:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & -ib & 0 \\ ib & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

$$\text{где } \varepsilon_x = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \right), \quad b = \varepsilon_0 \frac{\omega_m \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_m^2)\omega}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right), \quad (17.3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{N_3 e^2}{m_0 \varepsilon_0}} \approx \sqrt{3,190 N_3 \cdot 10^9} \quad - \text{собственная частота плазмы (частота Ленгмюра); } N_3 - \text{концентрация электронов в единице объема [см}^3\text{].}$$

Ленгмюра); N_3 - концентрация электронов в единице объема [см³].

Процесс взаимодействия между двумя частицами в плазме называется *столкновением* и характеризуется величиной ν - числом столкновений в секунду частиц различного вида. По концентрации электронов N_3 и числу столкновений ν в ионосфере выделяют несколько слоев, содержащих относительные максимумы N_3 . Основной максимум ионизации, называемый слоем F_2 , расположен на высотах от 250 до 400 км. Области ионизации, находящиеся выше и ниже основного максимума ионизации, называют внешней и внутренней ионосферой. Во внутренней ионосфере имеются четыре регулярных слоя: D , E , F_1 и F_2 (см. рисунок 17.2, а). Каждый слой характеризуется электронной плотностью $N_{\text{э max}}$ в максимумах ионизации, высотой нижней границы слоя, числом соударений электрона с тяжелыми частицами. Графики зависимости числа столкновений ν и $N_{\text{э max}} \nu$ от высоты h приведены на рисунке 17.2,б.

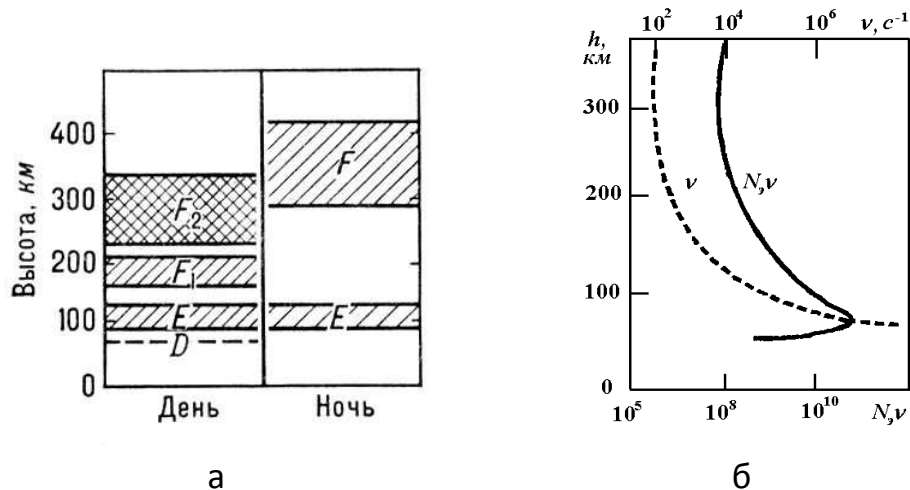


Рисунок 17.2 – Структура ионосферы

При проектировании радиотрасс может быть использовано *приближение простого слоя*, в соответствии с которым ионосфера представляется одним слоем, внутри которого электронная плотность распределена по параболическому закону, а число столкновений, как это несложно заметить из графика, приведенного на рисунке 17.2,б – по экспоненциальному закону:

$$N_3 = N_{\text{э max}} \left(\frac{2(h - h_0)}{Z_m} - \frac{(h - h_0)^2}{Z_m^2} \right), \nu = \nu_{\text{max}} \exp[-10^{-4}(h - h_0)], \quad (17.4)$$

Электродинамика и распространение радиоволн

где $N_{\text{эmax}}$ - электронная плотность в максимуме ионосферного слоя;
 $Z_m = 0,5(h_B - h_0)$ - полутолщина ионосферного слоя; h_0 - высота нижней границы слоя; h_B - высота верхней границы слоя.

При прохождении радиоволны через ионизированный газ положительные и отрицательные ионы начинают двигаться в такт с изменениями поля волны, что обуславливает появление некоторого конвекционного тока. Наличие данного тока наряду с током смещения, создаваемого смещением зарядов в свободном пространстве при распространении радиоволны, позволяет определить комплексную диэлектрическую проницаемость ионизированного газа (плазмы) в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 - i \frac{e^2 N_{\text{э}}}{m_0(i\omega + \nu)} = \varepsilon_0 - i \frac{e^2 N_{\text{э}}}{m_0(i\omega + \nu)} = \varepsilon_0 - i \frac{\sigma^{\text{э}}}{\omega}. \quad (17.5)$$

Приравняв вещественные и мнимые части в соотношении (17.5), несложно получить выражения для вычисления электрических параметров ионосферы:

$$\varepsilon = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_{\text{э}}}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \sigma^{\text{э}} = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_{\text{э}} \nu}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (17.6)$$

Для проведения расчетов используют различные приближения формул (17.6) в зависимости от соотношения рабочей частоты ω и частоты столкновений ν .

Так, при высоких частотах ($\omega^2 \gg \nu^2$ т.е. $f > 3$ МГц) в соотношениях (17.6) можно пренебречь слагаемым ν^2 , что позволит записать данные выражения в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (17.7a) \quad \sigma^{\text{э}} = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_{\text{э}} \nu}{\omega^2}. \quad (17.7b)$$

Следует отметить, что с увеличением частоты f параметры ионосферы приближаются к параметрам свободного пространства. В связи с этим основное влияние на распространение радиоволн ионосфера оказывает на частотах от 3 до 100 МГц.

При $\omega < \omega_0$ $\varepsilon < 0$, следовательно, коэффициент фазы волны

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (17.8)$$

является мнимой величиной, т.е. при данных частотах волна затухает по экспоненциальному закону.

На низких частотах ($\omega^2 \ll \nu^2$) в соотношениях (17.6) можно пренебречь величиной ω^2 , что приводит указанные соотношения к виду:

$$\varepsilon = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_{\text{э}}}{\nu^2}, \quad (17.9a) \quad \sigma^{\text{э}} = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_{\text{э}}}{\nu}. \quad (17.9b)$$

В этом случае электрические параметры ионизированного газа не зависят от рабочей частоты электромагнитных колебаний.

Электродинамика и распространение радиоволн

Особенности, возникающие при распространении электромагнитной волны в гиротропной среде, как известно, зависят от соотношения направления распространения электромагнитной волны и направления поля подмагничивания. Для ионосферы направление поля подмагничивания совпадает с силовыми линиями магнитного поля Земли. Таким образом, если направление распространения волны образует с направлением север-юг угол τ , как показано на рисунке

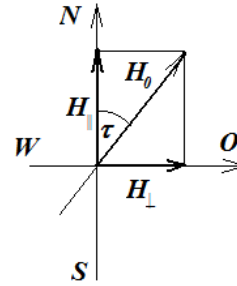


Рисунок 17.2 – Разложение направления распространения радиоволны в ионосфере

17.2, то вектор напряженности поля подмагничивания \vec{H}_0 можно разложить на две составляющие:

$$H_{\perp} = H_0 \sin \tau, \quad H_{\parallel} = H_0 \cos \tau. \quad (17.4)$$

Следовательно, в общем случае для учета особенностей необходимо учитывать, эффекты, соответствующие как продольному, так и поперечному относительно поля подмагничивания распространению волн. Из формулы (17.4) вытекает, что и частоты гироманитного резонанса также будет зависеть от угла τ :

$$\left\{ \begin{matrix} \omega_{m\perp} \\ \omega_{m\parallel} \end{matrix} \right\} = |\gamma| H_0 \left\{ \begin{matrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{matrix} \right\}. \quad (17.5)$$

В частных случаях, когда угол τ равен 0 или 90 градусам, частота гироманитного резонанса будет составлять величину

$$\omega_m = 8,84 \text{ МГц} \quad \text{или} \quad f_m = 1,4 \text{ МГц}. \quad (17.6)$$

17.2 Траектория распространения волны через ионосферу

При наклонном падении волны на ионосферу изменение направления распространения происходит в соответствии с уравнением луча в плоскостной атмосфере.

$$n(h) \sin(\theta(h)) = \sin(\theta_0), \quad (17.7)$$

где $n_0 = 1$ - коэффициент преломления воздушной среды, которую можно считать однородной. Вследствие этого падающий луч – прямой. Геометрия задачи показана на рисунке 17.3.

Соотношение (17.7) может быть записано в виде:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{80,8 N_e(h)}{f^2}} \sin(\theta(h)). \quad (17.8)$$

Во внутренней ионосфере угол $\theta(h)$ будет возрастать, как показано на рисунке 17.4.

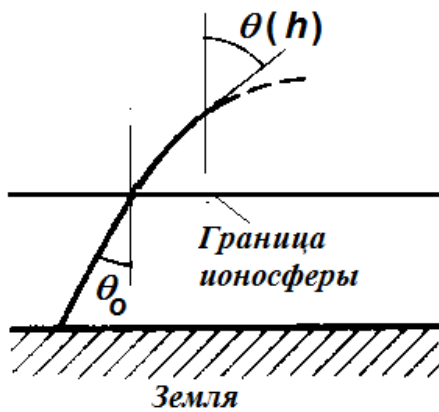


Рисунок 17.3 – Геометрия задачи

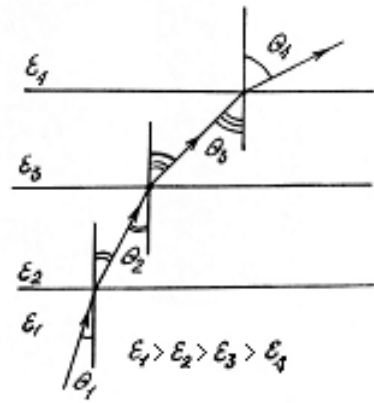


Рисунок 17.4 – Изменение угла падения

Выражение для максимальной рабочей частоты, при которой волны отразятся от ионосферы в случае заданной электронной концентрации и угла падения (так называемый закон «секанса») имеет вид:

$$f = \frac{\sqrt{80,8 N_e(h)}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}} = \frac{f(h_{\text{отр}})}{\cos \theta_0} = f(h_{\text{отр}}) \sec \theta_0. \quad (17.9)$$

Используя закон секанса несложно получить выражение для коэффициента преломления в виде:

$$n = \sqrt{1 - \frac{f_0^2(h_{\text{отр}})}{f^2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_0} = \cos \varphi_0, \quad (17.10a)$$

а соотношение для радиуса кривизны примет вид, удобный для анализа:

$$\rho = \frac{\cos^2 \varphi_0 f^2}{40,4(dN_e/dh)}. \quad (17.10б)$$

В соотношениях (17.10) $\varphi_0 = 90^\circ - \theta_0$ - угол возвышения.

Анализ приведенных выше соотношений показывает, что если $N_e(h) < N_{e_{\text{max}}}$, то на определенной высоте луч достигнет точки поворота, как показано на рисунке 17.5. Дальнейшая – нисходящая - часть траектории симметрична первоначальной. Следует отметить, что в точке поворота реализуется предельный случай полного отражения. Если же $N_e(h) > N_{e_{\text{max}}}$, то в ионосфере не найдется уровня, на котором $N_e(h) = N_e(h_{\text{отр}})$. Луч будет уклоняться к Земле, а при переходе во внешнюю ионосферу начнет уклоняться от Земли.

При дальнейшем увеличении частоты луч попадает в область, где градиент электронной концентрации dN_e/dh становится отрицательным, радиус кривизны меняет знак, и искривление луча произойдет вверх. Это означает, что луч пройдет через ионосферу, не отражаясь от нее.

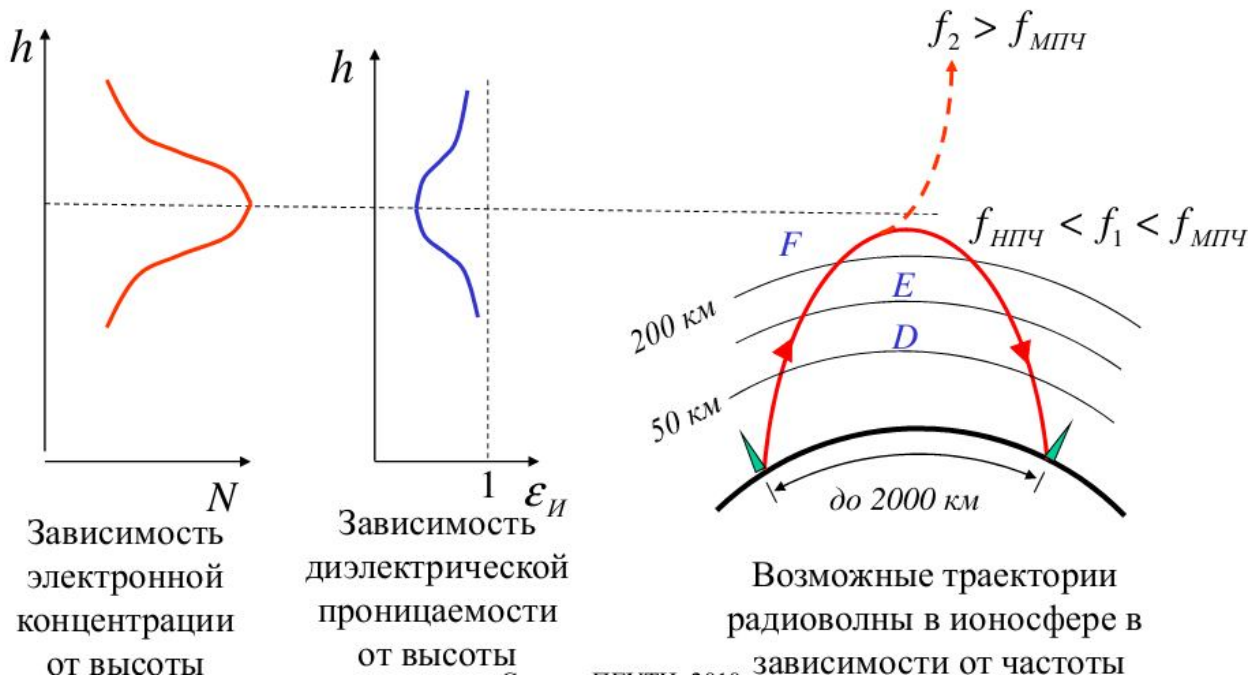


Рисунок 17.5 – Траектория ионосферной волны

Величина

$$f = \frac{f_{\text{кр}}}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\left(1 + \frac{h_{\text{отр}}}{a}\right)^2}}} = f_{\text{кр}}(\varphi_0) \quad (17.11)$$

называется **максимально применимой частотой**. Из анализа (17.11) следует, что для каждого угла φ_0 существует своя максимально применимая частота. С увеличением угла φ_0 $f_{\text{кр}}(\varphi_0)$ увеличивается и достигает своего наибольшего значения при $\varphi_0 = 0$. Наименьшую величину критическая частота имеет при вертикальном падении луча на ионосферу, т.е. $\varphi_0 = 90^\circ$.

Наименьшее расстояние D по поверхности земли, на которое падает отраженный луч на частоте f , называется радиусом зоны молчания, а соответствующая этому радиусу зоны молчания частота f является максимальной применимой частотой.

17.3 Квазипоперечное и квазипродольное распространение радиоволн

В зависимости от соотношения частот электромагнитной волны и частот ги-ротропных резонансов, соответствующих перпендикулярной и параллельной компонентам) различают случаи квазипродольного и квазипоперечного распространения радиоволн. В качестве критерия разделения выступают неравенство:

$$\frac{\omega_{\perp}^4}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2} \gg 4\omega^2 \omega_{\parallel}^2, \quad (17.12)$$

а также соотношение $\frac{\omega_0}{\omega}$. При $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 1$ даже при малых углах δ распространение волн является *квазипоперечным*. При $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$ в широком диапазоне изменения углов δ распространение волн является *квазипродольным*.

В остальных случаях в качестве критерия используется неравенство (17.12). Если данное неравенство выполняется, то считается, что распространение волны является квазипоперечным. Если неравенство (17.7) не выполняется, то это соответствует случаю квазипродольного распространения волн.

Для описания особенностей, возникающих при квазипоперечном распространении, волна представляется в виде двух волн: обыкновенной и необыкновенной, для которых различаются величины относительной диэлектрической проницаемости. Причем необыкновенная волна может в свою очередь быть разложена на две волны с различными значениями относительной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{об} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (17.13) \quad \varepsilon_{необ} = 2 \frac{\varepsilon_{необ1} \cdot \varepsilon_{необ2}}{\varepsilon_{необ1} + \varepsilon_{необ2}}, \quad (17.14)$$

$$\varepsilon_{необ1} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\frac{\omega_{\perp}^2}{\omega^2}}{1 + \frac{\omega_0}{\omega}}\right)^{-1}, \quad (17.15) \quad \varepsilon_{необ2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\frac{\omega_{\perp}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_0}{\omega}}\right)^{-1}, \quad (17.16)$$

Обыкновенная и необыкновенная волны различаются поляризациями:

- у обыкновенной волны линейная поляризация;
- у необыкновенной волны – эллиптическая поляризация.

Критические частоты обыкновенной и необыкновенной волн связаны соотношением:

$$f_{кр.необ} \approx f_{кр.об} + 0,7 \text{ МГц.} \quad (17.17)$$

Различие относительных диэлектрических проницаемостей приводит к различию фазовых скоростей волн, показателей преломления, а, следовательно, и к различию высот, на которых составляющие волны отражаются. Данный эффект, показанный на рисунке 17.6, получил название *эффекта двойного лучепреломления*. На данном рисунке кривая 1 иллюстрирует траекторию обыкновенной волны; кривые 2' и 2'' – траектории необыкновенных волн, причем кривая 2' соответствует необыкновенной волне, для которой относительная диэлектрическая проницаемость описывается формулой (17.15), а кривая 2'' – необыкновенной волне, для которой диэлектрическая проницаемость определяется выражением (17.16).

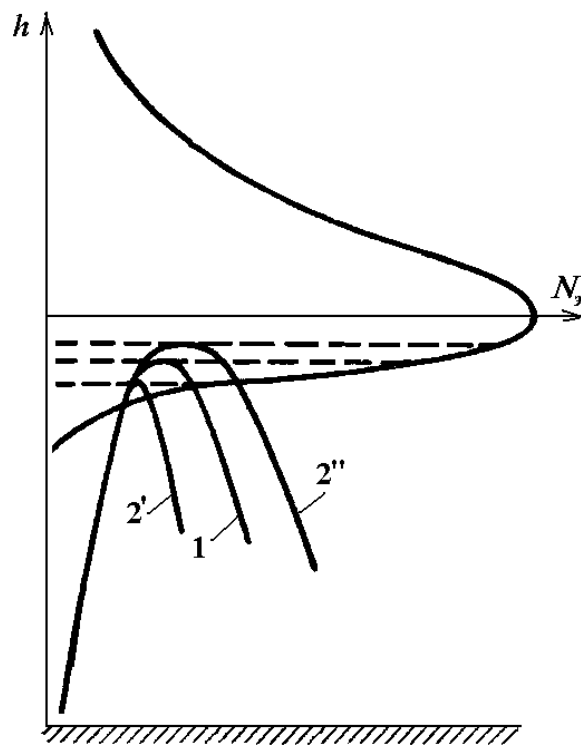


Рисунок 17.6 – Иллюстрация эффекта двойного лучепреломления

Таким образом, отражение необыкновенной волны может происходить от двух уровней электронной плотности – ниже и выше уровня отражения обыкновенной волны. Обычно наблюдается отражение только от нижнего уровня, а часть энергии, отразившаяся выше уровня отражения обыкновенной волны, поглощается.

Помимо эффекта двойного лучепреломления при квазипоперечном распространении волны наблюдается эффект *эффект Коттона-Муттона* или *эффект Фоххта*, заключающийся в преобразовании волны линейной поляризации в эллиптическую.

При квазипродольном распространении волны волна линейной поляризации может быть представлена в виде двух волн круговой поляризации – с левым и правым направлением вращения. Диэлектрическая проницаемость среды для этих волн будет определяться соотношениями:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + \omega_{m\parallel})} \right) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega_{m\parallel}}{\omega}} \right), \quad (17.18)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_{m\parallel})} \right) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{m\parallel}}{\omega}} \right). \quad (17.19)$$

При продольном распространении волн в гиротропной среде должен наблюдаться *эффект Фарадея*, заключающийся в повороте угла наклона вектора напряженности электрического поля и оси поляризационного эллипса магнитного поля по мере распространения волны в плазме.

Электродинамика и распространение радиоволн

Указанный эффект является источником дополнительных замираний. Поясним это на примере. Пусть волна КВ диапазона, распространяясь в слое F , проходит значительный участок трассы вдоль магнитного поля Земли. Тогда в силу эффекта Фарадея плоскость ее поляризации поворачивается. Однако из-за неустойчивости ионосферы угол поворота не остается постоянным. Следовательно, на входе линейно поляризованной антенны изменяется уровень принимаемого сигнала, поскольку данная антенна чувствительна к поляризации падающей волны.

На низких частотах волна с показателем преломления

$$n^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega\omega_m \cos \tau} \quad (\cos \tau \approx 1) \quad (17.20)$$

может распространяться вдоль силовых линий Земли на значительные расстояния. Данные волны имеют большую дисперсию. Источниками сигналов такого типа являются грозовые разряды, а сами сигналы называют *свистящими атмосферами*.

Наибольшее влияние на распространение радиоволн магнитное поле оказывает в том случае, когда рабочая частота близка к частоте гироманитного резонанса. Для ионосферы это соответствует средним волнам. Однако такие явления, как поворот плоскости поляризации, наблюдается в диапазоне коротких волн и даже в диапазоне УКВ.

17.4 Распространение радиоволн в межпланетной плазме

При организации связи с космическими кораблями необходимо учитывать особенности распространения радиоволн в межпланетной плазме.

Межпланетная плазма квазинейтральна. Ионизированные частицы движутся в радиальном направлении от Солнца, электронная плотность убывает с увеличением расстояния от Солнца по квадратичному закону. Вблизи Земли $N_{эл} \approx 60$ эл/см³, поэтому частота Ленгмюра составляет величину $f_0 \approx 70$ кГц, напряженность магнитного поля равна $\vec{H} = 4 \cdot 10^3$ А/м. Средние размеры неоднородностей межпланетной плазмы около 200 км, крупномасштабных неоднородностей – $(0,1 \dots 1) \cdot 10^6$ км. Неоднородности перемещаются со скоростями 300..800 км/с. Неоднородности плазмы вызывают флуктуации амплитуды, фазы, угла прихода, спектра электромагнитного поля.

На радиолиниях Земля – космос в межпланетной плазме электромагнитное поле затухает слабо (коэффициент затухания $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-21}$ дБ/км). На электромагнитное поле оказывают влияние основные потери радиолинии и затухание волны в атмосфере Земли. Диапазон частот ограничен отражающими и поглощающими свойствами атмосферы Земли. Радиоволны с длиной волны более 10 м отражаются от ионосферы, поэтому они не могут быть использованы для организации радиолинии Земля – внешняя ионосфера (космос). Верхняя граница частот, которые могут быть использованы для данной линии, определяется затуханием поля в тропосфере и равна примерно 10 ГГц.

Электродинамика и распространение радиоволн

В радиолиниях Земля – ИСЗ, траектория которых находится во внутренней ионосфере, возможна работа в ОВЧ и ВЧ диапазонах.

При прохождении радиоволной ионосферы проявляется эффект Фарадея. Угол поворота плоскости поляризации зависит от частоты, зенитного угла на точку наблюдения и непрерывно меняется. Максимальные его значения от единиц до тысяч градусов. Для борьбы с поляризационными замираниями применяют передающие и приемные антенны с круговой поляризацией.

Рефракция волны в тропосфере и ионосфере приводит к рефракционной ошибке в измерениях угловых координат космического корабля. рефракционной ошибкой является угол между истинным направлением на космический объект и касательной к траектории волны в точке наблюдения. Рефракционные ошибки в тропосфере и ионосфере суммируются и резко уменьшаются с увеличением частоты.

На космических радиолиниях существенны помехи, возникающие за счет радиоизлучения, создаваемого внеземными источниками. Основным источником космических помех является Галактика. На ее излучение накладывается излучение дискретных источников (Солнца, планет, звезд). Радиоизлучение Галактики особенно интенсивно принимается антенной в ее экваториальной плоскости в направлении центра Галактики.

На частотах, больших 1 ГГц, шумы за счет радиоизлучения атмосферы становятся преобладающими.

Список использованных источников

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. - Радио и связь, 2000.
2. Пименов Ю.В. Линейная макроскопическая электродинамика. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2007.
3. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. СПб: Лань, 2009.
4. Звездина М.Ю. Электродинамика и распространение радиоволн. Курс лекций. Ростов-на-Дону, РИС ЮРГУЭС, 2006.
5. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. М.: Связь, 1972.
6. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1967.